УДК 517.9

© **А. И. Булгаков, А. А. Григоренко**

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОВЫПУКЛЕННОГО ПО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЮ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

Введение

Здесь рассматривается многозначное отображение со значениями, принадлежащими пространству суммируемых функций и необладающими свойством выпуклости по переключению. По заданному отображению определяются овыпукленное по переключению и обобщенно овыпукленное отображения. Приводятся условия, при которых из соответствующей непрерывности (полунепрерывности снизу, сверху, непрерывности по Хаусдорфу) заданного многозначного отображения, вытекает соответствующая непрерывность построенных многозначных отображений. Отметим, что эти топологические свойства овыпукленного по переключению и обобщенно овыпукленного отображений являются фундаментальными при исследовании обобщенных решений функционально-дифференциальных включений (см. [1]). Формулируются условия, при которых у введенных многозначных отображений существует непрерывная однозначная ветвь. Также приводятся условия, при которых эта непрерывная ветвь с наперед заданной точностью реализует расстояние от образа однозначного отображения до значения овыпукленного по переключению многозначного отображения. Рассматриваются функционально-дифференциальные включения с полунепрерывной сверху по Хаусдорфу правой частью. Вводится понятие обобщенного решения и описываются некоторые свойства обобщенных решений.

§ 1. Обозначения и определения

Пусть X — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$ и пусть $U,V\subset X$. Обозначим $h^+_X[U;V]\equiv\sup\limits_{u\in U}\rho_X[u;V]$ — полуотклонение по Хаусдорфу между множествами U,V в пространстве X, где $\rho_X[\cdot;\cdot]$ — расстояние между точкой и множеством в этом пространстве; $\overline{\text{co}}U$ — замкнутую выпуклую оболочку U.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $C^n[a,b]$ пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $\mathcal{U}\subset[a,b]$ — измеримое множество, $\mu(\mathcal{U})>0$ (μ — мера Лебега). Обозначим $L^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})}=\int\limits_{\mathcal{U}}|x(s)|ds$, $\mathcal{C}\ell(L^n)(\mathcal{S}(L^n))$ — множество непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями (непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a,b]$); $L^1_+[a,b]$ конус неотрицательных функций пространства $L^1[a,b]$. Измеримость многозначного отображения понимается в смысле [2].

Для множества $\Phi\subset L^n[a,b]$ обозначим через $\text{sw}\,\Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y=\chi(\mathcal{U}_1)x_1+\chi(\mathcal{U}_2)x_2+\ldots+\chi(\mathcal{U}_m)x_m$$

элементов $x_i\in\Phi$, в которых $\mathcal{U}_i$ — непересекающиеся измеримые множества отрезка $[a,b]$ такие, что $[a,b]=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\mathcal{U}_i$, $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция соответствующих множеств. Пусть $\overline{\text{sw}}\Phi$ — замыкание множества $\text{sw}\,\Phi$ в пространстве $L^n[a,b]$. Множество $\overline{\text{sw}}\Phi$ будем называть выпуклой по переключению замкнутой оболочкой множества Φ.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $U\subset C^n[a,b]$. Будем говорить, что отображение $P:U\times U\to L^1_+[a,b]:$ принимает нулевое значение на диагонали $U\times U$, если для любого $x\in U$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00324) и Норвежского фонда NUFU (research programme PRO 06/02).

имеет место равенство $P(x,x)=0$; симметрично на множестве U, если для любых $x,y\in U$ выполняется соотношение $P(x,y)=P(y,x)$; непрерывно по второму аргументу в точке (x,x), принадлежащей диагонали $U\times U$, если для любой последовательности $y_i(\in U)\to x$ в пространстве $C^n[a,b]$ при $i\to\infty$ справедливо равенство $P(x,x)=\lim\limits_{i\to\infty}P(x,y_i)$; непрерывно по второму аргументу на диагонали $U\times U$, если оно непрерывно по второму аргументу в каждой точке диагонали $U\times U$. Аналогично определяется непрерывность по первому аргументу на диагонали $U\times U$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $U\subset C^n[a,b]$. Будем говорить, что отображение $P:U\times U\to L^1_+[a,b]$ обладает свойствами $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ на множестве U, если оно принимает нулевое значение на диагонали $U\times U$, кроме того: если оно непрерывно по второму аргументу на ней, то *оно обладает свойством* $\mathcal{A}$; если непрерывно по первому аргументу на ней, то *обладает свойством* $\mathcal{B}$; если непрерывно на ней и симметрично, то *обладает свойством* $\mathcal{C}$.

§ 2. Основные результаты

Рассмотрим отображение $\Phi:C^n[a,b]\to\mathcal{C}\ell(L^n)$. *Овыпукленный по переключению оператор* $\widetilde{\Phi}:C^n[a,b]\to\mathcal{S}(L^n)$ зададим равенством

$$\widetilde{\Phi}(x)=\overline{\mathrm{sw}}(\Phi(x)). \tag{1}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $U\subset C^n[a,b]$ *и пусть для отображения* $\Phi:C^n[a,b]\to\mathcal{C}\ell(L^n)$ *найдется такое отображение* $P:U\times U\to L^1_+[a,b]$, *что для любых* $x,y\in U$ *и любого измеримого множества* $\mathcal{U}\subset[a,b]$ *выполняется оценка*

$$h^+_{L^n(\mathcal{U})}[\Phi(x),\Phi(y)]\leqslant\|P(x,y)\|_{L^1(\mathcal{U})}. \tag{2}$$

Тогда для овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{\Phi}:C^n[a,b]\to\mathcal{S}(L^n)$, *определенного равенством* (1), *для любых* $x,y\in U$ *и любого измеримого множества* $\mathcal{U}\subset[a,b]$ *выполняется оценка* (2), *в которой* $\Phi(\cdot)\equiv\widetilde{\Phi}(\cdot)$.

С л е д с т в и е 1. *Если в условиях теоремы 1 отображение* $P:U\times U\to L^1_+[a,b]$ *обладает свойством* $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) *на множестве* $U\subset C^n[a,b]$, *то овыпукленное по переключению отображение* $\widetilde{\Phi}:C^n[a,b]\to\mathcal{S}(L^n)$, *определенное равенством* (1), *полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху; непрерывно) по Хаусдорфу на множестве* $U\subset C^n[a,b]$.

Отображение $P:U\times U\to L^1_+[a,b]$, удовлетворяющее неравенству (2), будем называть *мажорантным* для отображения $\Phi:C^n[a,b]\to\mathcal{C}\ell(L^n)$ на множестве U или просто *мажорантным*.

Пусть отображение $F_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2$ для каждой непрерывной функции $x\in C^n[a,b]$ суперпозиционно измеримо и ограничено суммируемой функцией для каждого ограниченного множества $K\subset\mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $M:C^n[a,b]\to\mathcal{C}\ell(L^n)$, заданное равенством

$$M(x)=\mathcal{N}_1(x)\cup\mathcal{N}_2(x), \tag{3}$$

где отображение $\mathcal{N}_i:C^n[a,b]\to\mathcal{S}(L^n)$, $i=1,2$ — операторы Немыцкого, порожденные функциями $F_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2$. Для оператора $M:C^n[a,b]\to\mathcal{C}\ell(L^n)$, имеющего вид (3), мажорантное отображение $\widetilde{P}:C^n[a,b]\times C^n[a,b]\to L^1_+[a,b]$ можно задать равенством

$$\widetilde{P}(x,y)(t)=max\{h^+_{\mathbb{R}^n}[F_1(t,x(t));F_1(t,y(t))];h^+_{\mathbb{R}^n}[F_2(t,x(t));F_2(t,y(t))]\}. \tag{4}$$

Как следует из теоремы 1 оператор $\widetilde{P}(\cdot,\cdot)$, имеющий вид (4), будет мажорантным и для овыпукленного по переключению отображения $\widetilde{M}:C^n[a,b]\to\mathcal{S}(L^n)$, определенного соотношением (1), в котором $\Phi(\cdot)\equiv M(\cdot)$.

Кроме того, из следствия 1 вытекает, что, если отображение $F_i : [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2$ полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу по второму аргументу, то овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{M} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, имеющее вид (3), полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу.

Обобщенный овыпукленный оператор $\widetilde{\Phi}_{\mathrm{co}} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$ определим соотношением

$$\widetilde{\Phi}_{\mathrm{co}}(x) = \overline{\mathrm{co}}\Bigg(\overline{\mathrm{sw}}\Big(\Phi(x)\Big)\Bigg). \tag{5}$$

Отметим, что значения обобщенного овыпукленного отображения $\widetilde{\Phi}_{\mathrm{co}} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$ не зависят от места на каком стоят операции замкнутой выпуклой и замкнутой выпуклой по переключению оболочек пространства суммируемых функций.

Т е о р е м а 2. *Пусть $U \subset C^n[a,b]$ и пусть для отображения $P : U\times U \to L^1_+[a,b]$ является мажорантным для оператора $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ на множестве U. Тогда оператор $P : U\times U \to L^1_+[a,b]$ является мажорантным на множестве U и для обобщенно овыпукленного оператора $\widetilde{\Phi}_{\mathrm{co}} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, имеющего вид* (5).

С л е д с т в и е 2. *Если в условиях теоремы 2 мажорантное отображение $P : U \times U \to L^1_+[a,b]$ обладает свойством $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) на множестве $U \subset C^n[a,b]$, то обобщенно овыпукленное отображение $\widetilde{\Phi}_{\mathrm{co}} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, определенное равенством* (5), *полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу на множестве U.*

Из теоремы 2 вытекает, что отображение $\widetilde{P} : C^n[a,b]\times C^n[a,b] \to L^1_+[a,b]$, заданное равенством (4), является мажорантным для обобщенно овыпукленного отображения $\widetilde{M}_{\mathrm{co}} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, определенного равенством (5), в котором $\Phi(\cdot) \equiv M(\cdot)$. Из следствия 2 также вытекает, что оно полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу, если функция $F_i : [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i = 1,2$ полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) по Хаусдорфу по второму аргументу.

Одним из основных методов при исследовании свойств обобщенных решений функционально-дифференциальных включений с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений, является вопрос о существовании непрерывной ветви у овыпукленного по переключению и обобщенно овыпукленного многозначных отображений (см. [3]). Из сформулированных теорем 1, 2 и их следствий, а также работ ([4] — [6]) вытекают следующие результаты.

Т е о р е м а 3. *Пусть $U \subset C^n[a,b]$ и пусть отображение $P : U\times U \to L^1_+[a,b]$ является мажорантным для оператора $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ и обладает свойством $\mathcal{A}$ на множестве U. Тогда у отображения $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, имеющего вид* (1), *найдется такое непрерывное отображение $\varphi : U \to L^n[a,b]$, что для любого $x \in U$ выполняется включение $\varphi(x) \in \widetilde{\Phi}(x)$.*

Т е о р е м а 4. *Пусть $U \subset C^n[a,b]$ и пусть оператор $\mathcal{G} : U \to L^n[a,b]$ непрерывен. Далее, пусть отображение $P : U\times U \to L^1_+[a,b]$ является мажорантным для оператора $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ и обладает свойством $\mathcal{C}$ на множестве U. Тогда для любого непрерывного отображения $\nu : U \to L^1_+[a,b]$, принимающего на множествах полной меры только положительные значения, у отображения $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, имеющего вид* (1), *найдется такое непрерывное отображение $\varphi : U \to L^n[a,b]$, что для любого $x \in U$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ оно удовлетворяет условиям: $\varphi(x) \in \widetilde{\Phi}(x)$;*

$$\|\mathcal{G}(x) - \varphi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} < \rho_{L^n(\mathcal{U})}[\mathcal{G}(x); \widetilde{\Phi}(x)] + \int\limits_{\mathcal{U}} \nu(x)(t)dt. \tag{6}$$

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $U \subset C^n[a,b]$ *и пусть оператор* $\mathcal{G} : U \to L^n[a,b]$ *непрерывен. Далее, пусть отображение* $P : U \times U \to L^1_+[a,b]$ *является мажорантным для оператора* $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ *и обладает свойством* $\mathcal{C}$ *на множестве* U. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *у отображения* $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, *имеющего вид* (1), *найдется такое непрерывное отображение* $\varphi : U \to L^n[a,b]$, *что для любого* $x \in U$ *и любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *оно удовлетворяет условиям:* $\varphi(x) \in \widetilde{\Phi}(x)$;

$$\|\mathcal{G}(x) - \varphi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} < \rho_{L^n(\mathcal{U})}[\mathcal{G}(x); \widetilde{\Phi}(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}). \qquad (7)$$

Отметим, что неравенства (6), (7) играют ключевую роль в вопросах качественного иследования множеств обобщенных решений функционально-дифференциальных включений.

Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального включения

$$\dot{x} \in \Phi(x), \qquad x(a) = x_0 \qquad (x_0 \in \mathbb{R}^n), \qquad (8)$$

с вольтерровым по А.Н. Тихонову (см.[1], [3]) оператором $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$, для которого на пространстве $C^n[a,b]$ существует вольтерров мажорантный оператор $P : C^n[a,b] \times C^n[a,b] \to L^1_+[a,b]$, обладающий на пространстве $C^n[a,b]$ свойством $\mathcal{B}$. Отметим, что в этом случае отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$, в правой части (8), а также оператор $\widetilde{\Phi}_{\text{co}} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n)$, определенный равенством (5), полунепрерывны сверху по Хаусдорфу.

Под *обобщенным решением задачи* (8) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую включению $\dot{x} \in \overline{\text{co}}\left(\overline{\text{sw}}\Big(\Phi(x)\Big)\right)$ и равенству $x(a) = x_0$.

Для задачи (8) аналогично ([1], [3]) можно определить локальное решение, определенное на отрезке $[a,\tau] \subset [a,b]$. Из следствия 2 вытекает, что задача (8) локально разрешима, каждое локальное решение задачи (8) можно продолжить либо на весь отрезок $[a,b]$, либо найдется такая непрерывная функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ $([a,c) \subset [a,b])$, удовлетворяющая условию $\overline{\lim\limits_{t \to c-0}} |x(t)| = \infty$, что она — продолжение локального решения и ее сужение на любой отрезок $[a,\tau] \subset [a,c)$ — локальное решение на отрезке $[a,\tau]$. Далее, найдется такой интервал $[a,c) \subset [a,b]$, что для каждого $\tau \in (a,c)$ множество всех локальных решений, определенных на $[a,\tau]$, представляет собой связный компакт пространства $C^n[a,\tau]$.

Список литературы

1. Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н. Функционально-дифференциальное включение с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестник Удм. университета. Математика. 2005. № 1. С. 3–20.
2. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач // М.: Наука. 1974.
3. Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н. Некоторые вопросы обобщенных решений функционально-дифференциальных включений // Теория управления и теория обобщенных решений уравнения Гамильтона-Якоби. Труды международного семинара. Екатеринбург. 22-26 июня 2005 г. 2006. Т. 1. С. 73–79.
4. Fryszkowski A. Continuous selection for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76. № 2. P. 163–174.
5. Bressan A., Colombo G. Exstensions and selections of maps with decomposable values // Studia Math. 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.
6. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I // Дифференциальные уравнения. 1992.Т. 28. № 3. С. 371-379.

Булгаков Александр Иванович
Тамбовский государственный ун-т,
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Григоренко Анна Александровна
Тамбовский государственный ун-т,
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru