УДК 517.917

© **Т. С. Быкова**

О ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ

В 1967 году В. М. Миллионщиков доказал [1], что всякая линейная система $\dot{x} = A(t)x$ с рекуррентной матрицей $A(t)$ приводима рекуррентным перроновским (ортогональным ляпуновским) преобразованием $x = P(t)y$ к системе $\dot{y} = B(t)y$ с рекуррентной верхней треугольной матрицей $B(t)$.

В данной работе рассматривается система с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \tag{1}$$

с рекуррентной по t матричной функцией $A(t,s)$ и исследуются условия, при которых сужение системы (1) на любое конечномерное подпространство существенных (то есть имеющих конечные показатели Ляпунова) решений асимптотически подобно некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений с ограниченной матрицей коэффициентов. Здесь запись x_t означает функцию $s \to x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменного $s \in [-r, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Доказанная в этой работе теорема дополняет исследования работ [2], [3].

§ 1. Основные определения и обозначения [2]

В системе (1) интеграл Стилтьеса рассматривается по переменной s при каждом фиксированном t, $r > 0$ и функция $A:\ \mathbb{R} \times [-r, 0] \to \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ удовлетворяет *естественным условиям*: функция $(t,s) \to A(t,s)$ ограничена в полосе $\mathbb{R} \times [-r, 0]$, имеет ограниченную вариацию по s, функция $t \to A(t,0)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, $A(t,-r) \equiv 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|\tau| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_{-r}^{0} |A(t+\tau, s) - A(t,s)|\, d\,s \leqslant \varepsilon$.

Далее систему (1) будем отождествлять с задающей ее функцией A, а пространство всех систем A, удовлетворяющих естественным условиям, обозначать $\mathfrak{A}$.

В качестве пространства начальных функций рассматривается пространство $\mathfrak{S}$ всех непрерывных функций $u: [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ с L_2-нормой $\|u(\cdot)\|_2 = \Big(\displaystyle\int_{-r}^{0} |u(s)|^2 ds\Big)^{1/2}$.

Всякое решение $t \to x(t, t_0, u)$ системы (1), удовлетворяющее при $t \in [t_0 - r, t_0]$ начальному условию $x(t) = u(t - t_0)$, порождает *движение* $t \to x_t(\cdot, t_0, u) \doteq x_t(t_0, u)$ в пространстве $\mathfrak{S}$, $t \geqslant t_0$ (при $t_0 = 0$ вместо $x_t(\cdot, 0, u)$ пишем $x_t(u)$). Таким образом, при всех $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ имеет место равенство $x_t = X(t,\tau)x_\tau$, где $X(t,\tau)\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ — оператор Коши системы (1).

Для $u \in \mathfrak{S}$ определим $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова

$$\varkappa(u) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln \|x_t(u)\|_2}{t}, \quad \varkappa(0) \doteq -\infty.$$

Тогда множество $\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) = -\infty\}$ образует линейное подпространство в $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}^+$ — прямое дополнение подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, то есть $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$. Тогда если $u \in \mathfrak{S}^+$ и $u \neq 0$, то $\varkappa(u) > -\infty$.

Зафиксируем в $\mathfrak{S}^+$ линейное подпространство $\mathbb{S}_0^p$ размерности p и построим движение $t \to x_t(\mathbb{S}_0^p) \doteq \mathbb{S}_t^p$ пространства $\mathbb{S}_0^p$. Будем говорить, что это движение порождено *сужением* системы A на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Такое сужение обозначим $(A, \mathbb{S}_0^p)$.

Наряду с системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$ будем рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{R}^p \tag{2}$$

с непрерывной на полуоси $\mathbb{R}_+$ матричной функцией $t \to B(t)$. Будем далее отождествлять систему (2) с задающей ее матрицей B и называть системой B. По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$, введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \ldots, y^p(t)$, образующем столбцы матрицы Коши $Y(t,\tau)$ системы B при $\tau = 0$.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p}$.

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $t \to L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B, если:
1) функция $t \to L(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$;
2) при $t \geqslant 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$;
3) выполнено неравенство $\sup\limits_{t \geqslant 0}\bigl(\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \to \mathbb{L}_2}\bigr) < \infty$.

Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *приводима* обобщенным ляпуновским преобразованием L к системе B, или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B *асимптотически подобны*.

§ 2. Приводимость рекуррентной системы с последействием [3]

О п р е д е л е н и е 2. Функцию $(t,s) \to A(t,s)$ (или, что эквивалентно, систему $A \in \mathfrak{A}$), будем называть *рекуррентной* (по переменной t), если для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ множество

$$\varTheta_A(\varepsilon, T) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant T}\Bigl(|A(t+\vartheta, 0) - A(t,0)| + \int_{-r}^{0} |A(t+\vartheta, s) - A(t,s)|\, ds\Bigr) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

При каждом $s \in [-r, 0]$ сдвиг функции $t \to A(t,s)$ на константу τ обозначим $A_\tau(t,s)$. Пусть далее, $\mathcal{R}(A)$ — замыкание множества $\{A_\tau(t,s) : \tau \in \mathbb{R}\}$ сдвигов функции A, понимаемое в следующем смысле: $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ в том и только в том случае, если для некоторой последовательности $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ и любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такой номер i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leqslant T}\Bigl(|A_{\tau_i}(t,0) - \widehat{A}(t,0)| + \int_{-r}^{0} |A_{\tau_i}(t,s) - \widehat{A}(t,s)|\, ds\Bigr) \leqslant \varepsilon.$$

Для каждой системы $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ полный набор $\mathbb{L}_2$-показателей Ляпунова системы $(\widehat{A}, \mathbb{S}_0^p)$ обозначим $\lambda_1(\widehat{A}), \ldots, \lambda_p(\widehat{A})$. Будем считать, что $\lambda_1(\widehat{A}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(\widehat{A})$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$, система $A \in \mathfrak{A}$ рекуррентна и для всех $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ и некоторой константы $\varkappa > -\infty$ выполнено неравенство $\lambda_1(\widehat{A}) \geqslant \varkappa$. Тогда найдутся система B с непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ верхней треугольной матрицей $B(t)$ и рекуррентное обобщенное ляпуновское преобразование L, приводящее систему $(A, \mathbb{S}_0^p)$ к системе B.*

Список литературы

1. Миллионщиков В. М. О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами. // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2127–2134.
2. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 731–737.
3. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Приводимость линейной системы с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 1. С. 53–64.

Быкова Татьяна Сергеевна
Ижевский государственный
технический ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: tsbkv@udm.net