УДК 517.977

© **А. Ф. Габдрахимов, В. А. Зайцев**

О ЛЯПУНОВСКОЙ ПРИВОДИМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

Рассмотрим линейную управляемую систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где $A \in M_n$, $B \in M_{n,m}$. Пусть управление в системе (1) строится в виде $u = U(t)x$, где $U : \mathbb{R} \to M_{m,n}$ — кусочно-непрерывная ограниченная матричная функция. Тогда система (1) перейдет в однородную систему

$$\dot{x} = (A + BU(t))\, x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Задача ляпуновской приводимости заключается в следующем: требуется для произвольной (канонической в некотором смысле) системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = C(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

с ограниченной на $\mathbb{R}$ кусочно-непрерывной матрицей $C(t)$ построить управление $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такое, чтобы система (2) с этим управлением была асимптотически эквивалентна системе (3) с заданной матрицей $C(t)$, то есть чтобы матрицы $A + BU(t)$ и $C(t)$ были кинематически подобны. Асимптотическая эквивалентность систем (2) и (3) означает существование преобразования Ляпунова $x = L(t)y$, связывающего эти системы. Величины и свойства, сохраняющиеся под действием ляпуновских преобразований, называются ляпуновскими (асимптотическими) инвариантами. Решения двух асимптотически эквивалентных систем имеют «одинаковое» поведение при $t \to +\infty$, поэтому приводимость к системе определенного вида позволяет влиять на асимптотическое поведение решений системы. Если в качестве $C(t)$ брать постоянные матрицы, то это означает приводимость в классическом смысле. Если в качестве $C(t)$ брать порождающие матрицы для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения, то говорят о приводимости системы (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению. Если в качестве системы (3) выбирать систему с отрицательными характеристическими показателями Ляпунова, то из ляпуновской приводимости к системе (3) будет следовать стабилизируемость системы (2), то есть экспоненциальная устойчивость всех решений системы (2). В качестве допустимых управлений также можно выбирать различные классы управлений, например, постоянные, или кусочно-постоянные, или периодические и т.п. Тогда говорят о ляпуновской приводимости в соответствующем классе управлений.

Здесь рассмотрены случаи $n = 2, 3, 4$.

Т е о р е м а 1 [1]. *Пусть $n = 2$ и пусть система (1) вполне управляема. Тогда для любой системы (3) найдется кусочно-постоянное периодическое управление $\widehat{U} = \widehat{U}(t)$, при котором система (2) асимптотически эквивалентна системе с заданной матрицей $C(t)$. Если матрица $C(t)$ постоянна, то есть $C(t) \equiv C$, то управление $\widehat{U}$ можно выбрать постоянным.*

Т е о р е м а 2 [1]. *Пусть $n = 3$ и пусть система (1) вполне управляема. Тогда для любой системы (3) найдется кусочно-постоянное периодическое управление $\widehat{U} = \widehat{U}(t)$, при котором система (2) асимптотически эквивалентна системе с заданной матрицей $C(t)$.*

[1]Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00258).

Предположим теперь, что система (3) стационарная, то есть $C(t) \equiv C$.

Т е о р е м а 3 [1]. *Пусть* $n = 3$ *и пусть система* (1) *вполне управляема. Тогда для любой матрицы* C *найдется управление* $\widehat{U}$, *при котором матрицы* $A + B\widehat{U}(t)$ *и* C *кинематически подобны. Причем, если матрица* C *имеет элементарные делители* $(\lambda - a)^2$, $(\lambda - a)$, *то управление* $\widehat{U} = \widehat{U}(t)$ *можно выбрать кусочно-постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом* $\vartheta > 0$ *с тремя переключениями на отрезках длины* ϑ*; в других случаях управление можно выбрать постоянным.*

Т е о р е м а 4 [2]. *Пусть* $n = 4$ *и пусть система* (1) *вполне управляема. Тогда для любой матрицы* C *найдется управление* $\widehat{U}$, *при котором матрицы* $A + B\widehat{U}(t)$ *и* C *кинематически подобны. Причем: а) если матрица* C *имеет элементарные делители* $(\lambda - a)^3$, $(\lambda - a)$, *то управление* $\widehat{U} = \widehat{U}(t)$ *можно выбрать кусочно-постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом* $\vartheta > 0$ *с тремя переключениями на отрезках длины* ϑ*; б) если матрица* C *имеет элементарные делители* $(\lambda - a)^2$, $(\lambda - a)$, $(\lambda - b)$, $b \neq a$, *то управление* $U = U(t)$ *можно выбрать кусочно-постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом* $\vartheta > 0$ *с четырьмя переключениями на отрезках длины* ϑ*; в других случаях управление можно выбрать постоянным.*

З а м е ч а н и е 1. Построенное во всех теоремах управление $\widehat{U} = \widehat{U}(t)$ обладает свойством «локальной ограниченности» относительно $C(t)$ в следующем смысле: для любого $N > 0$ существует $l = l(N)$ такое, что для любой матрицы $C(t)$, удовлетворяющей неравенству $|C(t)| \leqslant N$, $t \in \mathbb{R}$, кусочно-постоянное управление $\widehat{U}(t)$, обеспечивающее кинематическое подобие матриц $A + B\widehat{U}(t)$ и $C(t)$, будет удовлетворять неравенству $|\widehat{U}(t)| \leqslant l$, $t \in \mathbb{R}$.

Список литературы

1. Зайцев В. А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск, 2003. С. 31–62.
2. Габдрахимов А. Ф., Зайцев В. А. Ляпуновская приводимость четырехмерных линейных стационарных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск, 2006. С. 25–40.

Габдрахимов Александр Фаритович
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
e-mail: gab@udm.ru

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
e-mail: verba@udm.ru