УДК 517.518.6

© Л. И. Данилов

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПО ВЕЙЛЮ СЕЧЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $M_p(\mathbb{R},U)$, где $p \geqslant 1$ — множество (сильно) измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$, для которых

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t),x_0)\,dt < +\infty\,,\ x_0\in U.$$

На $M_p(\mathbb{R},U)$ определяются метрики

$$D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g) = \Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l} \rho^p(f(t),g(t))\,dt\Big)^{1/p},\ l>0$$

и полуметрика $D^{(\rho)}_p(f,g) = \lim\limits_{l\to+\infty} D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g)$, $f,g\in M_p(\mathbb{R},U)$. Для измеримого (по Лебегу) множества $T\subseteq\mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_W(T) = \lim_{l\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{l}\,\mathrm{mes}\,[\xi,\xi+l]\cap T\,,$$

где mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Пусть $M^*_p(\mathbb{R},U)$ — множество функций $f\in M_p(\mathbb{R},U)$ таких, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех измеримых множеств $T\subseteq\mathbb{R}$, для которых $\varkappa_W(T)<\delta$, справедливо неравенство

$$\lim_{l\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T} \rho^p(f(t),x_0)\,dt < \varepsilon\,.$$

Для функции $f\in M_p(\mathbb{R},U)$ число $\tau\in\mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,\,l})$*-почти периодом*, где $\varepsilon>0$, если $D^{(\rho)}_{p,\,l}(f(.),f(.+\tau))<\varepsilon$, и $(\varepsilon,D^{(\rho)}_p)$*-почти периодом*, если $D^{(\rho)}_p(f(.),f(.+\tau))<\varepsilon$. Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ *относительно плотно*, если существует число $a>0$ такое, что $[\xi,\xi+a]\cap T\neq\emptyset$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$. Функция $f\in M_p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$ принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R},U)$ *почти периодических* (п.п.) *по Вейлю* функций *порядка* p, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $l=l(\varepsilon,f)>0$, для которого множество $(\varepsilon,D^{(\rho)}_{p,\,l})$-почти периодов функции f относительно плотно.

На пространстве U определим также метрику $\rho'(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$, $x,y\in U$. Пусть $W(\mathbb{R},U)\doteq W_1(\mathbb{R},(U,\rho'))$ — пространство *п.п. по Вейлю* функций $f:\mathbb{R}\to U$ (порядка 1) со значениями в метрическом пространстве (U,ρ'). Имеем $W_p(\mathbb{R},U)\subseteq W_1(\mathbb{R},U)\subseteq W(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$. Последовательность $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ называется f*-возвращающей* для функции $f\in W(\mathbb{R},U)$, если $D^{(\rho')}_1(f(.),f(.+\tau_j))\to 0$ при $j\to+\infty$. Для функции $f\in W(\mathbb{R},U)$ через $\mathrm{Mod}\,f$ обозначается модуль (группа по сложению) таких чисел $\lambda\in\mathbb{R}$, что $e^{\mathrm{i}\lambda\tau_j}\to 1$ при $j\to+\infty$ (где $\mathrm{i}^2=-1$) для любой f-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}$. Если $U=(\mathcal{H},\|.\|)$ — банахово пространство и $f\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$, то $\mathrm{Mod}\,f$ совпадает с модулем частот функции f.

Пусть $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}_\rho)$ — метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства (U,ρ) с метрикой Хаусдорфа dist_ρ, $(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'})$ — метрическое пространство непустых замкнутых подмножеств пространства (U,ρ) с метрикой Хаусдорфа $\mathrm{dist}_{\rho'}$, соответствующей метрике ρ'. Пространства $W_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$, $p\geqslant 1$ и $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ *п.п. по Вейлю многозначных отображений* $F:\mathbb{R}\to\mathrm{cl}_b\,U$ определяются как соответствующие пространства п.п. по Вейлю функций со значениями в метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}_\rho)$. Положим $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)\doteq W_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'}))$; $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)$.

Т е о р е м а 1 ([1]). *Пусть* (U,ρ) *– полное метрическое пространство,* $g \in W(\mathbb{R},U)$, $F \in W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)$. *Тогда для любой неубывающей функции* $\eta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, *для которой* $\eta(t) > 0$ *при* $t > 0$, *существует функция* $f \in W(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\mathrm{Mod}\,f \subseteq \mathrm{Mod}\,g + \mathrm{Mod}\,F$, $f(t) \in F(t)$ *п.в. и* $\rho(f(t),g(t)) \leqslant \rho(g(t),F(t)) + \eta(\rho(g(t),F(t)))$ *п.в. Если* $F \in W_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b U)$ *для некоторого* $p \geqslant 1$, *то функция* f *принадлежит пространству* $W_p(\mathbb{R},U)$.

Для полного сепарабельного метрического пространства (U,ρ) обозначим через $(\mathcal{M}(U),d)$ (полное сепарабельное) метрическое пространство вероятностных борелевских мер $\mu[.]$, определенных на σ-алгебре борелевских подмножеств метрического пространства (U,ρ), с метрикой Леви – Прохорова d; $W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ — пространство *п.п. по Вейлю мерозначных функций* $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}(U)$ порядка 1 со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(U),d)$. Мерозначная функция $\mathbb{R} \ni t \to \mu[.;t] \in \mathcal{M}(U)$ принадлежит пространству $W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$ тогда и только тогда, когда $\int_U \mathcal{F}(x)\,\mu[dx;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ для всех непрерывных ограниченных функций $\mathcal{F} \in C_b(U,\mathbb{R})$ (см. [2]). При этом

$$\mathrm{Mod}\,\mu[.;.] = \sum_{\mathcal{F}\in C_b(U,\mathbb{R})} \mathrm{Mod}\int_U \mathcal{F}(x)\,\mu[dx;.]\,.$$

Для $\mu \in \mathcal{M}(U)$, $x \in U$ и $\delta \in (0,1)$ положим $r_\delta(x,\mu) = \inf\{r > 0 : \mu[U_r(x)] > \delta\}$, где $U_r(x) = \{y \in U : \rho(x,y) < r\}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* (U,ρ) *— полное сепарабельное метрическое пространство,* $g \in W(\mathbb{R},U)$, $\mu[.;.] \in W_1(\mathbb{R},\mathcal{M}(U))$. *Тогда для любого* $\delta \in (0,1)$ *существует функция* $f_\delta \in W(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\mathrm{Mod}\,f_\delta(.) \subseteq \mathrm{Mod}\,g(.) + \mathrm{Mod}\,\mu[.;.]$, $f_\delta(t) \in \mathrm{supp}\,\mu[.;t]$ *п.в. и* $\rho(f_\delta(t),g(t)) < r_\delta(g(t),\mu[.;t]) + \delta$ *п.в.*

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ — совокупность относительно плотных множеств $T \subseteq \mathbb{R}$. Будем обозначать через $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon;f)$ множество $(\varepsilon, D_p^{(\rho)})$-почти периодов функции $f \in M_p(\mathbb{R},U)$. Пусть $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ — множество функций $f \in M_p(\mathbb{R},U)$ таких, что 1) $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon;f) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ для всех $\varepsilon > 0$, 2) для любых $\varepsilon,\delta > 0$ существует компакт $K_{\varepsilon,\delta} \subseteq U$ такой, что $\varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t),K_{\varepsilon,\delta}) \geqslant \varepsilon\}) < \delta$. В случае $U = (\mathbb{R}^n,|.|)$ условие 2 выполняется для всех функций $f \in M_1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\widetilde{W}(\mathbb{R},U) \doteq \widetilde{W}_1(\mathbb{R},(U,\rho'))$. Имеем $W_p(\mathbb{R},U) = W(\mathbb{R},U) \cap M_p^*(\mathbb{R},U) \subseteq \widetilde{W}(\mathbb{R},U) \cap M_p^*(\mathbb{R},U) \subseteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$. Если $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U) \cap M_p^*(\mathbb{R},U)$, то для любого $\varepsilon' > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon';f) \supseteq \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\varepsilon;f)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* (U,ρ) *— полное метрическое пространство,* $g \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$, $F \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'}))$ *и* $\mathcal{T}(\varepsilon) \doteq \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\varepsilon;g) \cap \mathcal{P}_1^{(\mathrm{dist}_{\rho'})}(\varepsilon;F) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ *для всех* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *и любой функции* $h \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *с плотным в* $\mathbb{R}$ *(счетным) модулем частот* $\mathrm{Mod}\,h$ *(для нее* $\mathcal{T}(\varepsilon) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\varepsilon;h) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ *для всех* $\varepsilon > 0$*) найдется функция* $f_\delta \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $f_\delta(t) \in F(t)$ *п.в.,* $\rho(f_\delta(t),g(t)) < \rho(g(t),F(t)) + \delta$ *п.в. и для любого* $\varepsilon' > 0$ *существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что* $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\varepsilon';f_\delta) \supseteq \mathcal{T}(\varepsilon) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\varepsilon;h)$. *Если, кроме того,* $F \in M_p^*(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b U)$ *для некоторого* $p \geqslant 1$, *то* $f_\delta \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U) \cap M_p^*(\mathbb{R},U) \subseteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$.

Список литературы

1. Danilov L. I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 316. № 1. P. 110–127.
2. Данилов Л. И. О почти периодических по Вейлю мерозначных функциях // Известия Института математики и информатики УдГУ. Вып. 1 (31). Ижевск, 2005. С. 79–98.

Данилов Леонид Иванович
Физико-технический ин-т УрО РАН,
Россия, Ижевск
e-mail: danilov@otf.pti.udm.ru