УДК 517.929

© **Ю. Ф. Долгий**

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Рассматривается линейная стационарная система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt}=\int_{-r}^{0}d\eta(\vartheta)x(t+\vartheta),\quad \eta(0)=0,\quad t\in\mathbb{R}^+=(0,+\infty),\tag{1}$$

где $x:[-r,+\infty)\to\mathbb{R}^n$; η — матричная функция с ограниченным изменением на $[-r,0]$.

В функциональном пространстве состояний $\mathbf{C}=\mathbf{C}\big([-r,0],\mathbb{R}^n\big)$ данной системе ставится в соответствие уравнение (см. [1, Глава 6])

$$\frac{dx_t(\cdot)}{dt}=Ax_t(\cdot),\quad t\in\mathbb{R}^+,\tag{2}$$

где $Ax(\vartheta)=\dfrac{dx(\vartheta)}{d\vartheta}$, $\vartheta\in[-r,0]$; $D(A)=\Big\{x(\cdot):x(\cdot)\in\mathbf{C}^1\big([-r,0],\mathbb{R}^n\big),x'(0)=\displaystyle\int_{-r}^{0}d\eta(\vartheta)x(\vartheta)\Big\}$.

Для регулярных точек

$$\lambda\in\rho(A)=\Big\{\lambda:\det\big(\lambda I_n-\int_{-r}^{0}d\eta(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\big)\neq0,\lambda\in\mathbb{C}\Big\}$$

оператора A значения его резольвенты $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$ являются вполне непрерывными операторами и допускают представления в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов $R(\lambda,A)=K(\lambda)+V(\lambda),\lambda\in\mathbb{C}$. Здесь I_n — единичная матрица размерности $n\times n$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, I — тождественный оператор, конечномерные и вольтерровые операторы определяются соответственно формулами:

$$(K(\lambda)y)(\vartheta)=\exp(\lambda\vartheta)\Big(\lambda I_n-\int_{-r}^{0}d\eta(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\Big)^{-1}\Big(y(0)+\int_{-r}^{0}\int_{\vartheta}^{0}\exp(\lambda(\vartheta-s))y(s)dsd\vartheta\Big),$$

$$(V(\lambda)y)(\vartheta)=\int_{\vartheta}^{0}\exp(\lambda(\vartheta-s))y(s)ds,\quad \vartheta\in[-r,0],\quad y\in\mathbf{C},\quad \lambda\in\rho(A).$$

Операторы $R(\lambda,A)$, $K(\lambda)$, $V(\lambda)$, $\lambda\in\rho(A)$, допускают непрерывные расширения на сепарабельное гильбертовое пространство $\mathbf{H}=\mathbf{H}\big([-r,0],\mathbb{R}^n\big)$ со скалярным произведением $(x,y)=y^*(0)x(0)+\displaystyle\int_{-r}^{0}y^*(\vartheta)x(\vartheta)d\vartheta$, $x,y\in\mathbf{H}$. Здесь символ « $*$ » используется для обозначении операции сопряжения элемента конечномерного пространства. Для расширений этих операторов оставим прежние обозначения. Формулы их определяющие также сохранятся.П остроенные расширения операторов $R(\lambda,A)$, $K(\lambda)$, $V(\lambda),\lambda\in\rho(A)$, наследуют свойства вполне непрерывности, конечномерности и вольтерровости соответственно.

Характеристические показатели системы (1) совпадают с собственными числами оператора A, которые являются корнями трансцендентного характеристического уравнения

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 13 «Математические методы в нелинейной динамике».

$\det\Big(\lambda I_n - \int_{-r}^{0} d\eta(\vartheta)\exp(\lambda\vartheta)\Big) = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{C}$. Исследуем возможность аппроксимации этого уравнения полиноминальными уравнениями в ограниченной области комплексной плоскости. Реализации такой аппроксимации препятствует, прежде всего, неограниченность оператора A, которая не позволяет приближать его конечномерными операторами в равномерной операторной топологии. Здесь можно использовать неявную схему аппроксимации, при которой замена оператора A конечномерными операторами приводит к аппроксимации в равномерной операторной топологии эволюционного оператора сильно непрерывной полугруппы, порождаемой дифференциальным уравнением (2). Укажем работы, в которых решения системы с последействием (1) приближаются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности (см. [2], [3]). Явную схему аппроксимации можно связать с задачей построения конечномерных приближений для оператора $R(\lambda_0, A)$, $\lambda_0 \in \rho(A)$ в равномерной операторной топологии. Полиномы, задающие характеристические уравнения конечномерных приближений, сходятся равномерно в замкнутой ограниченной области комплексной плоскости к целой функции, задающей характеристическое уравнение оператора $R(\lambda_0, A)$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, если он — ядерный (см. [4, с. 203]). К сожалению, $R(\lambda_0, A)$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, являясь оператором Гильберта–Шмидта, не удовлетворяет, в общей ситуации, условию ядерности. Поэтому для обеспечения сходимости полиномов требуется регуляризация. Отметим, что оператор монодромии

$$U = \frac{1}{2\pi}\int_{Re\lambda=\alpha} R(\lambda, A)\exp(\lambda\omega)d\lambda,$$

где $\alpha > \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$, $\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$ — спектральное множество оператора A, $r \leqslant \omega$, является ядерным оператором. Его собственные числа являются мультипликаторами системы (1). При построении приближенных характических уравнений для мультипликаторов можно использовать полиномиальные аппроксимации (см. [5]).

Учитывая специальный вид представления оператора $R(\lambda_0, A)$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, предлагается при построении приближенных характеристических уравнений использовать определители возмущения (см. [4, с. 216]). Описывается итерационная процедура построения приближенных характеристических уравнений. Приводится оценка точности аппроксимации. Несомненное достоинство предлагаемой методики связано с использованием в вычислительной процедуре операторов, для которых известны явные аналитические представления.

Список литературы

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 221 с.
2. Красовский Н. Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием. // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28, № 4. С. 716–724.
3. Долгий Ю. Ф., Сажина С. Д. Оценка экспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием методом аппроксимирующих систем. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 9. С. 1480–1489.
4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1965. 448 с.
5. Долгий Ю. Ф. Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последействием. // Труды института математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 85–96.

Долгий Юрий Филиппович
Уральский государственный ун-т,
Россия, Екатеринбург
e-mail: Yurii.Dolgii@usu.ru