УДК 517.929

© Д. В. Дюгуров, В. И. Родионов

РЯД КОШИ ОБОБЩЕННОГО ИМПУЛЬСНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Введение. Для некоторых частных отклонений $F(\cdot)$ решение импульсных уравнений

$$\dot{x}(t) - x(F(t))\,\dot{Q}(t) = \dot{f}(t) \qquad x(t) - \int_\alpha^t x(F(\cdot))\,dQ = f(t) \tag{1}$$

допускает явное представление, использующее операции специальной функциональной алгебры. Здесь $\alpha, t \in K \doteq [a,b]$, $F : K \to K$ и $x, f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, функция $Q : K \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение ($Q \in \mathrm{BV} \doteq \mathrm{BV}(K)$), а первое уравнение понимается как равенство обобщенных функций. Анализ такого представления приводит к необходимости более общей постановки исходных уравнений (1) в F-интегральном виде [1]

$$(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x)(t) = \overset{\circ}{f}(t) \qquad x(t) - \int_\alpha^t (dQ * x) = f(t), \tag{2}$$

где оператор $V : x(t) \to x(t) - \int_\alpha^t (dQ * x)$ тесно связан с умножением «$*$», действующим в алгебре формальных степенных рядов, порожденной отклонением F.

1. F-умножение рядов и F-интеграл Римана–Стилтьеса. Зафиксируем отрезок $K \doteq [a,b]$ и $\ell \in \mathbb{N}$. Через $\mathrm{C} \doteq \mathrm{C}(K^\ell)$ обозначим алгебру (над полем $\mathbb{R}$) непрерывных функций $x : K^\ell \to \mathbb{R}$. Пусть, далее, $F : K \to K$ — фиксированная непрерывная функция. Через $\mathrm{C}[\lambda] \doteq \mathrm{C}(K^\ell)[\lambda]$ обозначим линейное пространство, состоящее из формальных степенных рядов (по степеням $\lambda \in \mathbb{R}$) вида $\sum_k \lambda^k x_k \doteq \sum_{k=0}^\infty \lambda^k x_k$ с функциональными коэффициентами $x_k \in \mathrm{C}$. Для любых $x \in \mathrm{C}$ и k применяем обозначение

$$x^{[k]} \doteq x^{[k]}(t_1, \ldots, t_\ell) \doteq x(F^{[k]}(t_1), \ldots, F^{[k]}(t_\ell)),$$

где $F^{[k]}(\xi) \doteq F(F(\ldots F(\xi)\ldots))$ — суперпозиция функции F (вычисленная k раз). Естественно считать $F^{[0]}(\xi) = \xi$, поэтому $x^{[0]} = x$. Очевидно, $(x^{[k]})^{[m]} = x^{[k+m]}$ для любых $k, m = 0, 1, \ldots$.

F-произведением рядов $\sum_k \lambda^k x_k$ и $\sum_m \lambda^m y_m$ из пространства $\mathrm{C}[\lambda]$ называется ряд из $\mathrm{C}[\lambda]$, определенный правой частью формулы $\sum_k \lambda^k x_k * \sum_m \lambda^m y_m = \sum_n \lambda^n \sum_{k+m=n} x_k\, y_m^{[k]}$. Бинарная операция «$*$» называется *$F$-умножением.* Пространство $\mathrm{C}[\lambda]$, наделенное операцией F-умножения, образует над полем $\mathbb{R}$ ассоциативную алгебру с единицей (будем обозначать ее в дальнейшем $\mathrm{C}_F[\lambda] \doteq \mathrm{C}_F(K^\ell)[\lambda]$).

Определение 1. Зафиксируем индекс $i = 1, \ldots, \ell$, сегмент $E \subseteq K$ и ряды $u, v \in \mathrm{C}_F(K^\ell)[\lambda]$. Если для всех $k, m = 0, 1, \ldots$ существуют интегралы Римана–Стилтьеса $\int_E (u_k \cdot d_i v_m^{[k]})$, то ряд $\int_E (u * d_i v) \doteq \sum_n \lambda^n \sum_{k+m=n} \int_E (u_k \cdot d_i v_m^{[k]})$ называется *левым F-интегралом*, а ряд $\int_E (d_i u * v) \doteq \sum_n \lambda^n \sum_{k+m=n} \int_E (d_i u_k \cdot v_m^{[k]})$ — *правым F-интегралом.*

Каждый из F-интегралов линеен по каждому из аргументов и удовлетворяет свойству аддитивности (если, конечно, все F-интегралы существуют). Если ряды $u, v \in \mathrm{C}_F(K^\ell)[\lambda]$ таковы, что коэффициенты u_k ряда u имеют ограниченное изменение по переменной t_i, то для любого сегмента $E \subseteq K$ F-интегралы $\int_E (u * d_i v)$ и $\int_E (d_i u * v)$ существуют.

2. Ряд Коши F-интегрального уравнения. Пусть в F-интегральном уравнении (2) $f = 1$, то есть $f_n(t) = \delta_{n0}$, а коэффициенты ряда Q непрерывны и имеют ограниченное изменение, причем $Q_0 = \mathrm{const}$. Через $X(t)$ обозначим решение этого уравнения. Другими словами, $X(t) - \int_\alpha^t (dQ * X) = 1$. Справедливо равенство $X_0 = f_0 = 1$, а ряд $X(t)$ обратим в алгебре $\mathrm{C}_F(K)[\lambda]$, то есть существует ряд $Y(t)$ такой, что $X(t) * Y(t) = 1 = Y(t) * X(t)$.

Определение 2. *Ряд Коши* $C(t,\tau)\doteq C(Q;t,\tau)$ F-интегрального уравнения (2) — это ряд из алгебры $\mathrm{C}_F(K^2)[\lambda]$, определенный равенством $C(t,\tau)\doteq X(t)*Y(\tau)$.

Очевидно, $C(s,s)=1$, в алгебре $\mathrm{C}_F(K^3)[\lambda]$ справедливо $C(t,s)*C(s,\tau)=C(t,\tau)$, а ряды $C(t,\tau)$ и $C(\tau,t)$ взаимно обратны в алгебре $\mathrm{C}_F(K^2)[\lambda]$. Следующие два свойства менее тривиальны: $C(\alpha,\tau)=Y(\tau)$, а если $\alpha=F(\alpha)$, то $C(t,\alpha)=X(t)$. Ряд Коши удовлетворяет тождеству $C(t,\tau)-\int_\tau^t\bigl(dQ(s)*C(s,\tau)\bigr)=1$.

3. Представление решений F-интегральных уравнений. В предыдущих пунктах мы имели дело с такими ядрами Q уравнения (2), что $Q_k\in\mathrm{CBV}\doteq\mathrm{CBV}(K)$, то есть все Q_k суть непрерывные функции ограниченной вариации. Через $\mathrm{CBF}\doteq\mathrm{CBF}(K)$ обозначим подпространство в CBV, состоящее из тех $x:K\to\mathbb{R}$, что $x^{[k]}=x(F^{[k]}(\cdot))\in\mathrm{CBV}$ для всех k. Для любой непрерывной кусочно монотонной функции $F:K\to K$ справедливо равенство $\mathrm{CBF}=\mathrm{CBV}$. Если в уравнении (2) все $Q_k\in\mathrm{CBF}$, то $C(t,\tau)-\int_\tau^t\bigl(C(t,s)*dQ(s)\bigr)=1$.

Теорема 1 (см. [1]). *Если в уравнении* (2) $\alpha=F(\alpha)$, *возмущение* f *таково, что* $f_k\in\mathrm{C}$ *при всех* $k=0,1,\ldots$, *а ядро* Q *таково, что* $Q_k\in\mathrm{CBF}$, $k\in\mathbb{N}$, $Q_0=\mathrm{const}$, *то единственное решение уравнения* (2) *представимо в виде* $x(t)=f(t)-\int_\alpha^t\bigl(d_sC(t,s)*f(s)\bigr)$.

4. Решения импульсных уравнений. В данном пункте мы допускаем разрывы у элементов $Q_k\in\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$ ядра Q и записываем уравнение (2) в виде $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x)(t)=\overset{\circ}{f}(t)$ (оно задано в обобщенных прерывистых функциях [2], определенных на интервале $K\doteq(a,b)$). Пространство $\mathcal{D}\doteq\mathcal{D}(K)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, называется пространством *основных* функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: говорим, что последовательность функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n\in\mathcal{D}$, сходится к функции $\varphi\in\mathcal{D}$ (и пишем $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha,\beta]\subset K$ и $\operatorname*{Var}\limits_{[\alpha,\beta]}(\varphi_n-\varphi)\underset{n}{\to}0$. Если $\mathrm{G}\doteq\mathrm{G}[\alpha,\beta]$ — это пространство прерывистых функций, то пространство $\Gamma\doteq\Gamma[\alpha,\beta]$ такое, что $\mathrm{BV}\subset\Gamma\subset\mathrm{G}$, состоит из функций x, представимых в виде $x=x^c+x_c$, где $x^c\in\mathrm{C}$, а $x_c\in\mathrm{H}\doteq\mathrm{H}[\alpha,\beta]$ — функция скачков. Если $x\in\Gamma^{\mathrm{loc}}\doteq\Gamma^{\mathrm{loc}}(K)$, то в $\mathcal{D}$ определены линейные непрерывные функционалы

$$(x,\varphi)\doteq\int_K\varphi(t)\,x(t)\,dt\qquad(\overset{\circ}{x},\varphi)\doteq\int_K\varphi\circ dx,$$

где второй функционал задан через присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса и называется *присоединенной обобщенной производной* [2] функции x. Напомним, что *присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса* определяется формулой $\int_\alpha^\beta u\circ dv\doteq\int_\alpha^\beta u^c dv^c-\int_\alpha^\beta u_c dv_c$. Присоединенный интеграл существует или нет одновременно с интегралом Римана–Стилтьеса, линеен по каждому из аргументов и удовлетворяет свойству аддитивности.

Теорема 2. *Если уравнение* (2) *записано в терминах присоединенных обобщенных производных,* $\alpha=F(\alpha)$, *возмущение* f *таково, что* $f_k\in\Gamma^{\mathrm{loc}}$ *при всех* $k=0,1,\ldots$, *а ядро* Q *таково, что* $Q_k^c\in\mathrm{CBF}^{\mathrm{loc}}$, $k\in\mathbb{N}$, $Q_0=\mathrm{const}$, *то единственное непродолжаемое решение уравнения* (2) *представимо в виде* $x(t)=f^c(t)-\int_\alpha^t\bigl(d_sC(Q^c;t,s)*f^c(s)\bigr)$, *где* $C(Q^c;t,s)$ — *это ряд Коши, порожденный уравнением вида* (2) *с ядром* $\sum_k\lambda^kQ_k^c$.

Список литературы

1. Родионов В. И. Полугрупповые интегральные уравнения: Монография. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та. 1995. 124 с.
2. Родионов В. И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2005. Вып. 1 (31). С. 3–78.

Дюгуров Денис Владимирович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: rodionov@uni.udm.ru

Родионов Виталий Иванович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: rodionov@uni.udm.ru