УДК 62.50

© **А. Н. Жаринов, С. С. Кумков**

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ, В КОТОРЫХ ОГРАНИЧЕНИЕ НА УПРАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНО ЗАВИСИТ ОТ КООРДИНАТ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА[1]

Рассматривается управляемая система

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(t,x,u),\ x\in\mathbb{R}^n,\ t\in[t_0,T],\ x(t_0)\in M\subset\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m,\\ u\in P(x)=\begin{cases}P_i, & x\in\Phi_i,\ i=\overline{1,N},\\ P_0, & x\in\Phi_0=\mathbb{R}^n\setminus\bigcup\Phi_i.\end{cases}\end{gathered}\tag{1}$$

Множества P_0, P_i, Φ_i ($i=\overline{1,N}$), M компактны ($P_0,P_i\subset\mathbb{R}^m$, $\Phi_i,M\subset\mathbb{R}^n$). Множества Φ_i ($i=\overline{1,N}$) попарно не пересекаются. Функция $f(t,x,u)$ гладкая по совокупности переменных (t,x,u) и удовлетворяет условию подлинейного роста по x. Задача состоит в построении множеств достижимости системы (1) в моменты времени $t\in[t_0,T]$ от начального множества M.

Поскольку зависимость $x\mapsto P(x)$ разрывна, то затруднительно напрямую использовать подходы классической теории управления. Для исследования поставленной задачи нужно определить понятия движения динамической системы и множества достижимости системы в заданный момент времени. Определения должны быть подобраны таким образом, чтобы удовлетворялись следующие условия:

а) движение не должно изменяться при переопределении функции $P(x)$ на множестве меры нуль (в частности, на $\partial\Phi_i$);

б) множества достижимости должны обладать полугрупповым свойством;

в) движения, идущие по границе трубки достижимости, должны удовлетворять принципу максимума.

Эти свойства являются естественными для классических постановок задач управления.

От задачи (1) с динамикой, заданной в форме дифференциального уравнения, перейдем к дифференциальному включению (уравнению в контингенциях) [1, 2]

$$\dot{x}\in F(t,x),\quad t\in[t_0,T],\ x\in\mathbb{R}^n,\ x(t_0)\in M.\tag{2}$$

Многозначную функцию $(t,x)\mapsto F(t,x)$ определим по Филиппову [2] в виде

$$F(t,x)=\bigcap_{\delta>0}\operatorname{cl}\operatorname{co}\bigcup_{x'\in O_\delta(x)}f\bigl(t,x',P(x')\bigr).$$

Здесь $O_\delta(x)$ — замкнутая δ-окрестность точки x. Для любых (t,x) значения $F(t,x)$ есть непустые выпуклые компакты. Функция F является полунепрерывной сверху по включению по переменной x, а при x из внутренности областей Φ_i гладкой по совокупности переменных (t,x). (Напомним, что многозначная функция $F(\cdot)$ называется гладкой, если опорная функция ее значений $c\bigl(\psi,F(\cdot)\bigr)$ гладкая по совокупности переменных функции F.) По-прежнему, задача состоит в построении множеств достижимости в моменты времени $t\in[t_0,T]$.

Функцию $x(\cdot)=x(\cdot;t_0,x_0)$, $x_0\in M$, назовем движением системы (1), если она является решением дифференциального включения (2). Определим множество достижимости $G(t;t_0,M)$ в момент $t\in[t_0,T]$ как сечение в этот момент пучка движений дифференциального включения (2), выходящего из точек множества M в момент t_0. При таком определении совокупность множеств $G(t;t_0,M)$ достижимости обладает полугрупповым свойством по времени.

Для изучения свойств системы (2) дополнительно введем дифференциальное включение, правая часть которого является гладкой и приближает правую часть системы (2). Окружим

[1] Работа поддержана РФФИ, гранты №№ 06-01-00414, 04-01-96099.

границу $\partial\Phi_i$ каждой из областей Φ_i слоем ширины 2ε. Переопределим функцию F внутри этих слоев.

Рассмотрим вспомогательную многозначную функцию $x \mapsto P_\varepsilon(x)$. Вне введенных ε-слоев эта функция будет совпадать с функцией P. Внутри полосы, связанной с границей области Φ_i, определим $P_\varepsilon(x)$ в виде

$$P_\varepsilon(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\delta_i(x)}{\varepsilon}\right) P_i + \left(1 - \alpha\left(\frac{\delta_i(x)}{\varepsilon}\right)\right) P_{i,0}, & \text{если } x \in \big(\partial\Phi_i + B(\varepsilon)\big) \bigcap \Phi_i, \\ \alpha\left(\frac{\delta_i(x)}{\varepsilon}\right) P_0 + \left(1 - \alpha\left(\frac{\delta_i(x)}{\varepsilon}\right)\right) P_{i,0}, & \text{если } x \in \big(\partial\Phi_i + B(\varepsilon)\big) \bigcap \Phi_0; \quad P_{i,0} = P_i \bigcup P_0. \end{cases}$$

Здесь $\delta_i(x)$ — расстояние от точки x до границы $\partial\Phi_i$, $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ — гладкая строго возрастающая функция такая, что $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, $\alpha'(+0) = \alpha'(1-0) = 0$ (α' — производная функции α). Символ $B(\varepsilon)$ означает замкнутый шар радиуса ε с центром в нуле.

На основе P_ε построим многозначную функцию F_ε:

$$F_\varepsilon(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \mathrm{cl}\,\mathrm{co} \bigcup_{x' \in O_\delta(x)} f\big(t, x', P_\varepsilon(x')\big).$$

Определим аппроксимирующую систему (ε-систему):

$$\dot{x} \in F_\varepsilon(t,x), \quad t \in [t_0, T], \ x(t_0) \in M. \tag{3}$$

Правая часть $F_\varepsilon(t,x)$ включения (3) является гладкой. Для задач управления дифференциальными включениями с гладкой правой частью в работе [3] сформулирован и доказан принцип максимума.

Основная идея данной работы заключается в том, чтобы, используя принцип максимума для «хорошей» системы (3), изучить при $\varepsilon \to 0$ поведение движений этой системы (ε-движений) и соответствующих им сопряженных функций. При этом требуется сделать выводы о строении того или иного движения системы (2) (идеального движения) и его сопряженной функции. В процессе изучения системы (3) авторы опирались на результаты работы [4].

В результате исследования получено утверждение, которое можно назвать принципом максимума для движений системы (2), приходящих в момент $t \in [t_0, T]$ на границу множества достижимости $G(t; t_0, M)$.

Список литературы

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М: Наука. 1974. 456 с.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М: Наука. 1985. 216 с.
3. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИ АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–249.
4. Асеев С. М. Метод гладких аппроксимаций в теории необходимых условий оптимальности для дифференциальных включений // Известия РАН, сер. матем. 1997. Т. 61. № 2. С. 3–26.

Жаринов Андрей Николаевич
Институт математики и механики УрО РАН,
Россия, Екатеринбург
e-mail: zharik@gamil.com

Кумков Сергей Сергеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
Россия, Екатеринбург
e-mail: 2445@mail.ur.ru