УДК 517.934+517.977

© В. А. Зайцев, Е. К. Макаров, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТАМИ А. М. ЛЯПУНОВА[1]

Введение

Всякая характеристика линейной системы

$$\dot{x} = D(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

сохраняющаяся при ляпуновских преобразованиях, называется *инвариантом А.М. Ляпунова*[2]. Инвариантами Ляпунова являются, например, такие величины (свойства), как полный спектр показателей Ляпунова, свойства правильности и приводимости, коэффициенты неправильности, центральные, особые и экспоненциальные показатели и многие другие.

Задачи управления ляпуновскими инвариантами, будучи задачами управления на неограниченных интервалах времени, не являются задачами классической математической теории управления. К числу таких задач относится, например, задача стабилизации системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

с помощью линейной обратной связи $u = U(t)x$. Для стационарных систем эта задача стабилизации известна достаточно давно и может рассматриваться как традиционная задача теории автоматического регулирования.

Наш доклад посвящён задачам управления инвариантами Ляпунова и результатам в этом направлении, полученным в Ижевске и Минске [1–25].

§ 1. Билинейные управляемые системы

Билинейной мы называем систему

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t,u)x, \quad \text{где} \quad \mathcal{A}(t,u) = A(t) + u_1A_1(t) + \ldots + u_rA_r(t), \quad (t,x,u) \in \mathbb{R}^{1+n+r}, \tag{3}$$

с измеримыми по Лебегу и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами $t \mapsto A(t), A_i(t) \in \mathbb{M}(n)$. Здесь $\mathbb{M}(n)$ — пространство квадратных матриц порядка n с нормой, индуцированной евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$. Управление $t \mapsto u(t) = \big(u_1(t), \ldots, u_r(t)\big) \in \mathbb{R}^r$ называется *допустимым*, если оно измеримо по Лебегу и принимает значения в заранее заданном множестве, расположенном в $\mathbb{R}^r$. Система

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

полученная из (2) с помощью обратной связи $u = U(t)x$, может быть записана в виде (3); если же наблюдению доступны не все координаты x, но только их линейная комбинация $y = C^*(t)x$, то линейное по наблюдаемым параметрам управление $u = U(t)y$ приводит к изучению замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)UC^*(t)\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

которая тоже может быть записана в виде (3).

Всякой билинейной системе можно поставить в соответствие так называемую «*большую систему*» [3, 7]

$$\dot{z} = F(t)z + G(t)v, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^r, \tag{6}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

[2]Любые две системы вида (1), связанные преобразованием Ляпунова, называются *асимптотически эквивалентными*. Все асимптотически эквивалентными системы имеют общую совокупность инвариантов Ляпунова.

наследующую многие свойства системы (3). Здесь матрица $F(t) = A(t) \otimes E - E \otimes A^*(t)$, $\otimes$ — кронекерово (прямое) произведение матриц, $G(t) = (\operatorname{vec} A_1(t), \ldots, \operatorname{vec} A_r(t))$, vec — операция, разворачивающая матрицу по строкам в вектор-столбец (в случае системы (5) матрица $G(t)$ имеет вид $B(t) \otimes C(t)$).

Пусть $Z(t,s)$ — матрица Коши системы $\dot z = F(t)z$, $\mathfrak{L}_\vartheta(t_0) \doteq \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} Z(t_0,t)G(t)\mathbb{R}^r dt$ — *пространство управляемости* системы (6) на отрезке $I = [t_0, t_0+\vartheta]$. Системы (6) называется *вполне управляемой на* I, если $\mathfrak{L}_\vartheta(t_0) = \mathbb{R}^{n^2}$. Далее, система (6) называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие $\vartheta > 0$ и $\alpha > 0$, что для любого $t_0 \geqslant 0$ она вполне управляема на I и для всякой точки $z_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$ среди управлений, переводящих (t_0, z_0) в $(t_0+\vartheta, 0)$, найдется управление $v(t,t_0,z_0)$, удовлетворяющее неравенству $|v(t,t_0,z_0)| \leqslant \alpha|z_0|$, $t \in I$. Если «большая система» равномерно вполне управляема, то систему (3) будем называть *равномерно согласованной* [2, 11].

Основные результаты о локальной управляемости различных ляпуновских инвариантов основаны на следующих двух теоремах.

Т е о р е м а 1. *Если система* (3) *равномерно согласованна, то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любой измеримой функции* $t \mapsto Q(t) \in \mathbb{M}(n)$, *удовлетворяющей неравенству* $\sup_t |Q(t)| \leqslant \delta$, *найдется допустимое управление* $t \mapsto u(t)$, $\sup_t |u(t)| \leqslant \varepsilon$, *при котором система* (3) *асимптотически эквивалентна системе* $\dot x = (A(t) + Q(t))x$.

Для линейной управляемой системы (2) имеет место более сильное утверждение.

Т е о р е м а 2. *Если система* (2) *равномерно вполне управляема, то существуют такие* $\delta > 0$ *и* $l > 0$, *что для любой измеримой функции* $t \mapsto Q(t) \in \mathbb{M}(n)$, $\sup_t |Q(t)| \leqslant \delta$, *найдется допустимое управление* $t \mapsto U(t) \in \mathbb{M}(m,n)$[3], $\sup_t |U(t)| \leqslant l \sup_t |Q(t)|$, *при котором система* (4) *асимптотически эквивалентна системе* $\dot x = (A(t) + Q(t))x$.

Из этих теорем и асимптотической теории линейных систем следует локальная управляемость центральных и особых показателей, достижимость верхнего центрального показателя и возможность с помощью сколь угодно малого управления $u(t)$ превратить систему (3) в систему с интегральной разделенностью (то есть систему с попарно различными устойчивыми показателями Ляпунова).

§ 2. Управление ляпуновскими инвариантами

Пусть $\mathfrak{S}_n$ — пространство систем вида (1) с измеримыми и ограниченными на $\mathbb{R}$ матрицами D, ℓ — некоторый ляпуновский инвариант, $\ell(\mathfrak{S}_n)$ — множество значений инварианта ℓ, $\mathcal{U}$ — *множество допустимых управлений*[4]. Определим отображение $\varphi_\ell : \mathcal{U} \to \ell(\mathfrak{S}_n)$, которое ставит в соответствие всякому допустимому управлению $u(\cdot)$ значение $\ell(\mathcal{A})$ инварианта ℓ системы (3) при $u = u(\cdot)$.

О п р е д е л е н и е 1. Система (3) обладает свойством *глобальной управляемости ляпуновского инварианта* ℓ, если отображение φ_ℓ сюръективно: $\varphi_\ell(\mathcal{U}) = \ell(\mathfrak{S}_n)$.

Если множество $\ell(\mathfrak{S}_n)$ содержится в некотором метрическом пространстве $(\mathfrak{X}, \rho)$, введем определения локальной, а также пропорциональной локальной и пропорциональной глобальной управляемости этого инварианта.

О п р е д е л е н и е 2. Система (3) обладает свойством *локальной управляемости ляпуновского инварианта* ℓ, если отображение φ_ℓ открыто при $u(t) \equiv 0$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для каждого $\alpha \in \ell(\mathfrak{S}_n)$, удовлетворяющего неравенству $\rho(\ell(A), \alpha) \leqslant \delta$, существует допустимое управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, что $\sup_t |u(t)| \leqslant \varepsilon$ и $\varphi_\ell(u) = \alpha$. Определения *пропорциональной локальной* (и *пропорциональной глобальной*) *управляемости* инварианта ℓ дополнительно включают в себя липшицеву оценку $\sup_t |u(t)| \leqslant k\rho(\ell(A), \alpha)$.

[3] $\mathbb{M}(m,n)$ — пространство $(m \times n)$-матриц.

[4] Для системы (3) это измеримые и ограниченные на $\mathbb{R}$ функции $t \to u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ со значениями в $\mathbb{R}^r$, для систем (4) и (5) — матрицы $U(t)$ соответствующих размеров с аналогичными свойствами.

Т е о р е м а 3. *Пусть ℓ — произвольный ляпуновский инвариант, множество значений которого содержится в метрическом пространстве.*
1) *Если система* (2) *равномерно вполне управляема, то из пропорциональной глобальной управляемости инварианта ℓ для системы*

$$\dot{x} = \big(A(t) + U\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

следует его пропорциональная локальная управляемость для системы (4).
2) *Если система* (3) *равномерно согласованна, то из пропорциональной глобальной управляемости инварианта ℓ для системы* (7) *следует его локальная управляемость для системы*(3).

Т е о р е м а 4. *Если система $\dot{x} = A(t)x$ правильная или диагонализируемая или имеет устойчивые показатели Ляпунова, то система* (7) *обладает свойством пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнено условие теоремы* 4. *Тогда:*
1) *если система* (2) *равномерно вполне управляема, то система* (4) *обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова;*
2) *если система* (3) *равномерно согласованна, то она обладает свойством локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

О п р е д е л е н и е 3. Система (4) обладает свойством *глобальной ляпуновской приводимости*, если для произвольной системы (1) из множества $\mathfrak{S}_n$ найдется допустимое управление такое, что система (4) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (1).

Т е о р е м а 6. *Пусть* (2) *— система с T-периодическими коэффициентами. Тогда система* (4) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости в том и только в том случае, если система* (2) *вполне управляема.*

Т е о р е м а 7. *Пусть $n = 2$. Если система* (2) *равномерно вполне управляема, то замкнутая система* (4) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Т е о р е м а 8. *Если система* (2) *равномерно вполне управляема, а функция $t \to B(t)$ кусочно равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то полный спектр показателей Ляпунова системы* (4) *глобально управляем.*

Пусть $\mathfrak{I}$ — совокупность ляпуновских инвариантов, которые для треугольных систем определяются системами их диагонального приближения[5].

Т е о р е м а 9. *Если система* (2) *равномерно вполне управляема, а функция $t \to B(t)$ кусочно равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то система* (4) *обладает свойством одновременной глобальной управляемости ляпуновских инвариантов, принадлежащих множеству $\mathfrak{I}$.*

Т е о р е м а 10. *Если система* (2) *равномерно вполне управляема, то система* (4) *равномерно стабилизируема, то есть для каждого $\gamma > 0$ найдется допустимое управление $U(t)$, что старший показатель системы* (4) *удовлетворяет неравенству $\lambda_n(A+BU) < -\gamma$.*

§ 3. Модальное управление

Будем говорить, что стационарная система

$$\dot{x} = \big(A + BUC^*\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

обладает модальным управлением, если для любого многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ существует матрица $U \in \mathbb{M}(m,k)$ такая, что характеристический многочлен системы (8) совпадет с $p(\lambda)$. Матрица U называется модальным управлением. Если система (8) обладает модальным управлением, то она обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова, причем U может быть выбрано из класса постоянных управлений.

[5]Множеству $\mathfrak{I}$ принадлежат такие инварианты преобразований Ляпунова, как центральные, особые и экспоненциальные показатели, свойство правильности.

Пусть матрицы системы (8) имеют следующий вид: элементы первой наддиагонали матрицы A не равны нулю, элементы выше первой надиагонали равны нулю; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C нулевые, $p \in \{1,\dots,n\}$. Пусть $\chi(A;\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$. Построим по матрице A матрицу S_1 следующим образом: вычеркнем из матрицы A последнюю строку и припишем сверху первую строку единичной матрицы $E \in \mathbb{M}(n)$. Далее строим матрицу S_{i+1} по матрице S_i, $i = 1,\dots,n-1$, следующим образом: вычеркиваем из матрицы S_i последнюю строку и последний столбец и приписываем сверху и слева первую строку и первый столбец единичной матрицы. Все матрицы S_i невырожденные. Положим $S \doteq S_n \cdot S_{n-1} \cdot \ldots \cdot S_1$. Пусть $J_1 \in \mathbb{M}(n)$ — это первый единичный косой ряд (то есть матрица, элементы первой наддиагонали которой равны 1, остальные элементы — нули); $J_k \doteq J_1^k$; $J_0 \doteq E$. Построим матрицу $G \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i-1}J_{i-1}^*$; $a_0 = 1$.

Т е о р е м а 11. *Система* (8) *обладает модальным управлением тогда и только тогда, когда матрицы* $C^*S^{-1}J_0GSB,\dots,C^*S^{-1}J_{n-1}GSB$ *линейно независимы. В этом случае модальное управление* U, *приводящее* $\chi(A+BUC^*;\lambda)$ *к наперед заданному многочлену* $p(\lambda)$ *с коэффициентами* γ_i, *находится из системы линейных уравнений*

$$\begin{gathered}
\operatorname{Sp} C^*S^{-1}J_0GSBU = a_1 - \gamma_1,\\
\operatorname{Sp} C^*S^{-1}J_1GSBU = a_2 - \gamma_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\operatorname{Sp} C^*S^{-1}J_{n-1}GSBU = a_n - \gamma_n.
\end{gathered}$$

§ 4. Пространство линейных управляемых систем

Существует стандартная процедура построения динамической системы сдвигов по линейной управляемой системе, позволяющая эффективно исследовать асимптотическое поведение исходной системы и всех систем, полученных замыканием множества сдвигов. Эта методика (описание которой в простейшей ситуации дано ниже) использовалась нами при доказательстве утверждений §§ 1,2.

Пусть Σ — полное метрическое пространство, $\{f^t\}$ — поток на Σ, тогда (Σ, f^t) — топологическая динамическая система. Семейство линейных управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \tag{9}$$

будем отождествлять с парой (S,Σ), $S(\sigma) \doteq (A(\sigma),B(\sigma)) \in \mathbb{M}(n,n+m)$, а фиксированную систему семейств (S,Σ) — с парой (S,σ). Пространство систем (S,σ) с ограниченными на Σ функциями $\sigma \to S(\sigma)$ обозначим $\mathfrak{S}$. Оператор Коши системы $\dot{x} = A(f^t\sigma)x$ обозначим $X(t,s,\sigma)$.

Всякой системе (S,σ) и каждому $\vartheta > 0$ поставим в соответствие пространство управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma) \doteq \displaystyle\int_0^\vartheta X(0,t,\sigma)B(f^t\sigma)\mathbb{R}^m\,dt$ системы (S,σ) на отрезке $[0,\vartheta]$.

Семейство (S,Σ) назовем *регулярным*, если найдется $\vartheta_0 > 0$ такое, что для всех $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ размерность $\dim\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma)$ пространства $\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma)$ не зависит от ϑ и σ. Регулярное семейство (S,Σ) назовем *каноническим*, если:
1) для каждого $k = 1,\dots,n$ и любого $\sigma \in \Sigma$ линейное пространство $L^k \doteq \operatorname{lin}\{e^1,\dots,e^k\}$ ($e^1,\dots,e^n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$), инвариантно относительно системы (A,σ);
2) найдется такое $\vartheta_0 > 0$, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ имеет место равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma) = L^r$, где $r \doteq \dim\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma)$.

Каноническое семейство (C,Σ), $C(\sigma) = (F(\sigma),G(\sigma))$ будем называть *каноническим представителем* семейства (S,Σ), если найдется такая ортогональная при каждом σ матрица $P(\sigma) \in \mathbb{M}(n)$, что при каждом $\sigma \in \Sigma$ преобразование $x = P(f^t\sigma)y$ приводит систему (S,σ) к системе (C,σ).

Напомним ещё, что динамическая система (Ω, g^t) называется *расширением* системы (Σ, f^t), если существует непрерывное отображение p пространства Ω на Σ, сопрягающее потоки (то есть $p(\Omega) = \Sigma$ и $pg^t = f^t p$). Если (Ω, g^t) — расширение динамической системы (Σ, f^t) и задано семейство (S, Σ), где $S \in \mathfrak{S}$, то для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $\omega \in p^{-1}(\sigma)$ определена непрерывная и ограниченная на Ω функция $\omega \to \mathcal{S}(\omega) \doteq S(p(\omega)) = S(\sigma)$. Построенная так функция $\mathcal{S} \doteq (\mathcal{A}, \mathcal{B})\colon \Omega \to \mathbb{M}(n, n+m)$ порождает семейство $(\mathcal{S}, \Omega)$ систем $(\mathcal{S}, \omega)$ вида

$$\dot{x} = \mathcal{A}(g^t\omega)x + \mathcal{B}(g^t\omega)u, \quad (t, \omega, x, u) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Это новое семейство $(\mathcal{S}, \Omega)$ (назовем его *псевдорасширением* семейства (S, Σ)) фактически является другой записью семейства (S, Σ). Действительно, для каждого $\sigma \in \Sigma$ все системы $(\mathcal{S}, \omega)$ на слое $\gamma(\sigma) \doteq \{\omega \in \Omega\colon p(\omega) = \sigma\}$ совпадают с системой (S, σ). Поэтому для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех $\omega \in \gamma(\sigma)$ матрица Коши $\mathcal{X}(t, s, \omega)$ системы $(\mathcal{A}, \omega)$ совпадает с $X(t, s, \sigma)$. Следовательно, имеет место равенство $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \omega) = \mathcal{L}(S, \sigma)$.

Т е о р е м а 12. *Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) систем вида (9), где $S \in \mathfrak{S}$, найдется такое расширение (Ω, g^t) с компактным фазовым пространством Ω, что отвечающее ему псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ), обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.*

В силу теоремы 12, псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) (удовлетворяющего условиям теоремы 12) приводимо стационарным перроновским преобразованием $x = P(g^t\omega)y$ к каноническому семейству $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Для формулировки следующего утверждения напомним, что фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, f^t) называется *минимальным* (относительно потока f^t), если оно замкнуто и для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $f^t\Sigma = \Sigma$.

Т е о р е м а 13. *Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с минимальным (относительно f^t) компактным фазовым пространством Σ и любого семейства (S, Σ) систем вида (9), где $S \in \mathfrak{S}$, найдется такое расширение (Ω, g^t) с минимальным (относительно g^t) компактным фазовым пространством Ω, что отвечающее ему псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.*

Из теоремы 13 следует, в частности, что если размерность пространства управляемости системы (2) равна $r \leqslant n$ и матрицы $A(t)$ и $B(t)$ рекуррентны, то система (2) приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе $\dot{y} = F(t)y + G(t)u$ с рекуррентными $F(t)$ и $G(t)$, причем $F(t)$ — верхняя треугольная, а последние $n - r$ строк матрицы $G(t)$ равны нулю.

Список литературы

1. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
2. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.
3. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1949–1957.
4. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 228–238.
5. Попова С. Н., Тонков Е. Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 723–724.
6. Тонков Е. Л. Задачи управления показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1682–1686.
7. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.

8. Макаров Е. К., Попова С. Н. О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова систем с некратными показателями // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 495–499.
9. Макаров Е. К., Попова С. Н. К методу поворотов для линейных управляемых систем // Доклады НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 6. С. 13–16.
10. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
11. Зайцев В. А., Тонков Е. Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2(441). С. 60–67.
12. Зайцев В. А. Об управлении показателями Ляпунова и о λ-приводимости // Вестник Удмуртского университета. 2000. № 1. С.35–44.
13. Зайцев В. А. Согласованность, достижимость и управление показателями Ляпунова: Дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ижевск, 2000. 102 с.
14. Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы, стабилизация и управление показателями Изобова // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск, 2000. Т. 4. С. 146–155.
15. Tonkov E. L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.
16. Макаров Е. К. Асимптотические инварианты линейных дифференциальных систем: Дис.... док. физ.-мат. наук: 01.01.02. Минск, 2001. 207 с.
17. Попова С. Н. Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем // Известия вузов. Математика. 2002. № 6(481). С. 50–53.
18. Зайцев В. А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Серия «Математика». 2003. С. 31–62.
19. Макаров Е. К., Попова С. Н. О достаточных условиях локальной пропорциональной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 217–226.
20. Попова С. Н. К свойству локальной достижимости линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.
21. Попова С. Н. К свойству пропорциональной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1578–1579.
22. Попова С. Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
23. Попова С. Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
24. Попова С. Н. Одновременная локальная управляемость спектра и коэффициента неправильности Ляпунова правильных систем // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 425–428.
25. Попова С. Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: Дис.... док. физ.-мат. наук: 01.01.02. Екатеринбург, 2004. 264 с.

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: vaz@verba.udm.ru

Макаров Евгений Константинович
Ин-т математики НАН Беларуси,
Беларусь, Минск
e-mail: jcm@im.bas-net.by

Попова Светлана Николаевна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: ps@uni.udm.ru

Тонков Евгений Леонидович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: eltonkov@udm.ru