УДК 517.929

© **А. В. Захаров**

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

В консервативной системе с одной степенью свободы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0, \qquad x \in (-a, a), \tag{1}$$

где f — непрерывная нечетная функция на интервале $(-a, a)$, $f(x) > 0$ при $x \in (0, a)$, существует однопараметрическое семейство периодических решений, период которых зависит от начальных условий. В работе показано, что введение запаздывания в такую систему приводит к разрушению семейства и возможности появления изолированных периодических решений, которые могут быть устойчивыми. Уравнение, возмущенное запаздыванием, имеет вид

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + F\big(x(t), x(t-\tau)\big) = 0, \qquad \big(F(x,x) = f(x)\big), \tag{2}$$

где τ — положительное запаздывание. Найдены достаточные условия существования устойчивых периодических решений этого уравнения.

Исследуем систему, описываемую уравнением с запаздыванием (2), где F — скалярная функция аргументов x и x_τ, τ — малое положительное запаздывание. Решение x_0 уравнения (1), с начальными условиями $x_0(0,\mu) = \mu$, $\dot{x}_0(0,\mu) = 0$, $\mu \in (0,a)$, имеет период $T_0(\mu)$. Для фиксированного значения $\mu_* \in (0,a)$ рассмотрим периодическое решение $x_*(t) = x_0(t,\mu_*)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (1) с периодом $T_* = T_0(\mu_*)$. Показано, что если функция $P(\mu) = \int_0^{T_0(\mu)} F_2\big(x_0(s,\mu)\big)\dot{x}_0^2(s,\mu)ds$, $\mu \in (0,a)$ имеет простой нуль $\mu_* \in (0,a)$ ($P'(\mu_*) \neq 0$), удовлетворяющий условию $T_0'(\mu_*) \neq 0$, то, при малых положительных значениях параметра τ, существует единственное T-периодическое решение $x(t,\tau)$, $t \in \mathbb{R}$ уравнения (2), допускающее асимптотики $T = T_*(1 + O(\tau))$, $x(t,\tau) = x_*(t) + O(\tau)$, $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее условию $\dot{x}(0,\tau) = 0$. Здесь $F_2(x) = \partial F(x,x)/\partial x_\tau$.

Т е о р е м а 1. *Пусть F — трижды непрерывно дифференцируемая функция в области $(-a,a) \times (-a,a)$, f — нечетная функция на интервале $(-a,a)$, $f(x) > 0$ при $x \in (0,a)$ и функция P имеет простой нуль $\mu_* \in (0,a)$, удовлетворяющий условию $T_0'(\mu_*) \neq 0$. Тогда при малых положительных значениях τ периодическое решение $x(t,\tau)$, $t \in \mathbb{R}$ уравнения* (2) *устойчиво, если $P'(\mu_*) < 0$, и неустойчиво, если $P'(\mu_*) > 0$.*

Исследуем систему, описываемую уравнением с запаздыванием (2), где τ–конечное положительное запаздывание. Ставится задача нахождения устойчивых периодических решений уравнения (2) с периодом, равным запаздыванию.

Искомые периодические решения уравнения (2) принадлежат семейству периодических решений обыкновенного автономного дифференциального уравнения второго порядка (1) и существуют, если уравнение $T(\mu) = \tau$ имеет решения. Обозначим через $x(t,\mu)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0,a)$ периодическое решение уравнения (1) с периодом $T(\mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0,\mu) = \mu$, $\dot{x}(0,\mu) = 0$, $\mu \in (0,a)$.

Задача исследования устойчивости периодических решений уравнения (2) сводится к оценке расположения собственных чисел краевой задачи [1] для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с существенно переменными коэффициентами. Предложен метод изучения движения собственных чисел краевой задачи по комплексной плоскости при изменении специального параметра в коэффициентах системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На этом пути удалось свести задачу устойчивости к изучению бифуркаций собственных чисел z краевой задачи в точках $z = 1$ и $z = -1$.

При условии четности, задаем асимптотические разложения $F_i(y) = a_0^{(i)} + a_2^{(i)}y^2 + o(y^2)$, $i = 1,2$. Через M обозначим точку области $\mathfrak{D} = \{(a_0^{(1)}, a_0^{(2)}) : a_0^{(1)} + a_0^{(2)} > 0\}$ с координатами $a_0^{(1)}$ и $a_0^{(2)}$. В области $\mathfrak{D}$ определим множества $E_0 = \left\{M : \ 0 < a_0^{(2)} < \frac{3}{5}a_0^{(1)}\right\}$, $D_0 = \left\{M : \ -\frac{5}{13}a_0^{(1)} < a_0^{(2)} < 0\right\}$. Введем обозначение $\varphi_{11}(\mu) = \hat{\varphi}_{11}(-\pi, -1, \mu)$, где $\hat{\varphi}_{11}$ — компонента ФМР системы краевой задачи. Пусть $F_2(x) \neq 0$ на $[0, a)$. Тогда справедлива

Т е о р е м а 2. *Пусть все критические аргументы функции T невырождены, $\varphi_{11}(\mu) \neq 0$ при $\mu \in [0, a)$ и $T(\mu^0) = \tau$, где $\mu^0 \in (0, a)$ не является критическим аргументом функции T. Если $M \in \mathfrak{D} \setminus (E_0 \bigcup D_0)$, то τ-периодическое решение $x(t, \mu^0)$ уравнения (2) неустойчиво. Если $M \in E_0 \bigcup D_0$, то периодическое решение устойчиво, когда выполняется неравенство*

$$F_2(0)T'(\mu^0) > 0, \tag{3}$$

и неустойчиво, если это неравенство строго нарушается.

Рассмотрим уравнение (2), где $F(x, y) = 2x + 0.5y - 2x^3 + 2x^5$. Имеем $f(x) = 2.5x - 2x^3 + 2x^5$, $F_2(x) = 0.5$, $x \in [0, a)$, $a = 2$, $M = (2, 1) \in E_0$. Вычисления показали, что функция T на $(0, a)$ имеет один критический аргумент $\mu_1^a = 0.778$, и функция φ_{11} не имеет нулей на $[0, a)$. Взяв запаздывание $\tau = 4.2$, получаем два значения параметра μ_1 и μ_2, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (2). Устойчивым является решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_1$, так как выполняются требования теоремы 2 и условие устойчивости (3): $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. Согласно той же теореме решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$, неустойчиво, так как $F_2(0)T'(\mu_2) < 0$. На рисунке, жирная серая линия — начальная функция. Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

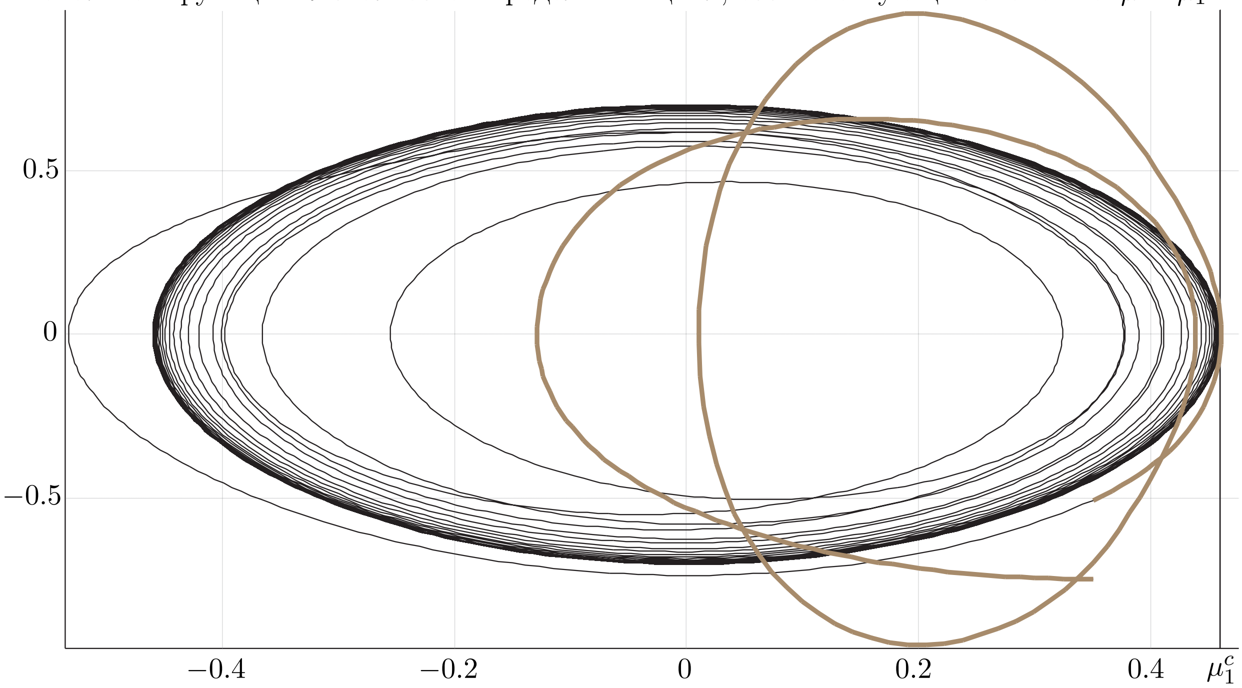

Рис. 1: Траектория решения ур. (2) ($\mu_1^c = 0.4595$, $T_1^c = 4.1999$).

Список литературы

1. *Шиманов С.Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. матем. и механ. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 450–458.

Захаров Андрей Владимирович
НПО "Автоматики",
Россия, Екатеринбург
e-mail: hazarov@etel.ru