УДК 517.977

© **А. Г. Иванов**

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ[1]

1. Пусть $\mathrm{frm}(\mathcal{U})$ — совокупность мер Радона на $\mathbb{R}^m$ носитель которых содержится в множестве $\mathcal{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathrm{rpm}(\mathcal{U})$ его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона. Через $(\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathcal{U})), \|\cdot\|_{w,\mathbb{T}})$ обозначим нормированное пространство, состоящее из таких измеримых на промежутке $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ отображений $t \mapsto \mu(t) \in \mathrm{frm}(\mathcal{U})$, что их вариация $|\mu(t)|(\mathcal{U})$ ограничена по $t \in \mathbb{T}$. Пусть $\mathcal{M}_{\mathbb{T}} \doteq \mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{rpm}(\mathcal{U}))$, и при $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,u) \rangle \doteq \int_{\mathcal{U}} f(t,x,u)\mu(t)(du), \tag{1}$$

в которой функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ при каждом $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ принадлежит для всякого отрезка $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ пространству $\mathfrak{V}([t_0,t_1] \times K \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ каратеодоровских функций. Фиксируем решение $\widehat{x}(t)$, $t \geqslant 0$ системы (1), отвечающее управлению $\widehat{\mu} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}$, и рассмотрим его интегральную кривую $\gamma_+(\widehat{x}) \doteq \{(t, \widehat{x}(t)),\ t \in \mathbb{R}_+\}$.

Определение 1. Система (1) называется *равномерно локально управляемой* (РЛУ) *в малом на* $\gamma_+(\widehat{x})$, если существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ для любого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)] \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |\widehat{x}(\tau) - x_0| \leqslant \varepsilon\}$ найдется такое управление $\mu \in \mathcal{M}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, что $\|\widehat{\mu} - \mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta\, |\widehat{x}(\tau) - x_0|$ и при котором система (1) имеет решение $x(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \vartheta$, удовлетворяющее условиям: $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = \widehat{x}(\tau+\vartheta)$.

Определение 2. Система (1) называется *равномерно локально достижимой* (РЛД) *в малом с* $\gamma_+(\widehat{x})$, если существуют такие константы $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ для любого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau+\vartheta)]$ найдется такое управление $\mu \in \mathcal{M}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, что $\|\widehat{\mu} - \mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leqslant \eta\, |\widehat{x}(\tau+\vartheta) - x_0|$ и при котором система (1) имеет решение $x(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \vartheta$, удовлетворяющее условиям: $x(\tau) = \widehat{x}(\tau)$, $x(\tau+\vartheta) = x_0$.

Определение 3. Система (1) *обладает свойством* C) *относительно* $\gamma_+(\widehat{x})$, если она обладает одновременно свойствами РЛУ в малом на $\gamma_+(\widehat{x})$ и РЛД в малом с $\gamma_+(\widehat{x})$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + \langle \Delta\mu(t), f(t, \widehat{x}(t), u) \rangle, \tag{2}$$

где $A(t) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), u) \rangle$, $\Delta\mu(t) \doteq \widehat{\mu}(t) - \mu(t)$, и говорим, что эта система равномерно локально управляема (РЛУ), если найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta > 0$, что при каждом $\tau \geqslant 0$ и всяком $x_0 \in O_\varepsilon[0]$ найдется такое $\mu_{x_0} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta} \doteq \mathcal{M}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, что при $\mu(t) = \mu_{x_0}(t)$ система (2) имеет решение $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \vartheta$, удовлетворяющее условиям: $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = 0$.

Далее, предположим, что для фиксированного процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ выполнены условия:

1) найдется такое $r > 0$, что $\sup\limits_{\tau \geqslant 0} \displaystyle\int_\tau^{\tau+1} \max_{(x,u) \in K(t) \times \mathcal{U}} (|f(t,x,u)| + |f'_x(t,x,u)|)dt < \infty$, где компакт $K(t) \doteq \widehat{x}(t) + O_r[0]$;

2) существуют такие константы $\widehat{r} \in (0, r]$, $\alpha > 0$ и функция $\mathfrak{f} \in \mathfrak{V}^{loc}(\mathbb{R} \times \mathcal{U}, \mathbb{R}_+)$, что $\sup\limits_{\tau \geqslant 0} \displaystyle\int_\tau^{\tau+1} \max_{u \in \mathcal{U}} \mathfrak{f}(t,u)dt < \infty$ и для почти каждого $t \in \mathbb{R}_+$ и всех $(z,u) \in O_{\widehat{r}}[0] \times \mathcal{U}$ выполнено неравенство $\max\limits_{\theta \in [0,1]} |f'_x(t, \widehat{x}(t) + \theta z, u) - f'_x(t, \widehat{x}(t), u)| \leqslant \mathfrak{f}(t,u)|z|^\alpha$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258)

Т е о р е м а 1. *Пусть управляемый процесс* $(\widehat{x}(t), \widehat{\mu}(t))$, $t \geqslant 0$, *системы* (1) *такой, что система* (2) РЛУ *и выполнены условия* 1) *и* 2). *Тогда система* (1) *обладает свойством* C) *относительно* $\gamma_+(\widehat{x})$.

2. Пусть APM_1 — совокупность таких $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, что для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ почти периодических (п.п.) по Степанову функций. Рассмотрим систему (1) при $\mu \in \mathrm{APM}_1$ и функцией f, принадлежащей при каждом $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ пространству $S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}))$ п. п. по Степанову функций. Через $\mathcal{A}$ обозначим совокупность таких управляемых процессов $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, указанной системы (1), в которых $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — п.п. по Бору решение, отвечающее $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$.

Задача

$$I(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mu(t), g(t, x(t), u) \rangle dt \to \inf, \ (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}, \tag{3}$$

где $g \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}))$ $(K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n))$, называется задачей оптимального управления п.п. движениями, и в которой $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{A}$ называется решением, если $I(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \leqslant I(x(\cdot), \mu(\cdot))$ для всех $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{A}$ — *решение задачи* (3) *и п.п. по Степанову система* (1) *обладает свойством* C) *относительно* $\gamma_+(\widehat{x})$. *Тогда для для всякого фиксированного отрезка* $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ *и любого процесса* $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}[t_0, t_1]$, *такого, что* $x(t_0) = \widehat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \widehat{x}(t_1)$, *выполнено неравенство*

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \widehat{\mu}(t), g(t, \widehat{x}(t), u) \rangle dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \langle \mu(t), g(t, x(t), u) \rangle dt. \tag{4}$$

Пусть $\mathfrak{A}([t_0, t_1]; K)$ совокупность таких управляемых процессов $(x(\cdot), \mu(\cdot))$ системы (1), в которых решение $x(t)$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ содержится в заданном множестве $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 4. Процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}([t_0, t_1]; K)$ называется *оптимальным для задачи*

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mu(t), g(t, x(t), u) \rangle dt \to \min, \quad (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}([t_0, t_1]; K), \tag{5}$$

если для любого другого процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}([t_0, t_1]; K)$, такого, что $x(t_0) = \widehat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \widehat{x}(t_1)$, выполнено неравенство (4).

Совокупность решений задачи (5) в смысле определения (4) обозначим $O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K)$.

Л е м м а 1. *Если* $\mathfrak{A}([t_0, t_1]; K) \neq \emptyset$, *то множество* $O\mathcal{P}([t_0, t_1]; K)$ *также не пусто.*

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда найдется такая компактная окрестность* K *множества* $\{\widehat{x}(t),\ t \in [0, \infty)\}$, *что равномерно по* $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0, T]; K)$ *существует* $\lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mu_T(t), g(t, x_T(t), u) \rangle dt \doteq c_0$ *и* $c_0 = I(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$.

Список литературы

1. Иванов А.Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 3. С. 312–324.
2. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 4. С. 441–454.

Иванов Александр Геннадьевич
Удмуртский государственный университет,
Россия, Ижевск
e-mail: imi@uni.udm.ru