УДК 517.929

© **Г. Г. Исламов**

ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ НЁТЕРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть B — комплексное банахово пространство, пространство $D \subset B$ изоморфно прямому произведению $B \times C^n$. Примеры таких пространств D см. в [1]. Нётерово отображение $G : B \to D$ индекса $(-n)$ в работе [2] названо $\mathcal{G}$-отображением. Пусть $\delta : D \to B$ и $\Lambda : B \to D$ есть нётеровы отображения индекса соответственно n и $(-n)$, причём произведение $\delta\Lambda$ есть тождественное отображение I в пространстве B, $r_1, \ldots, r_n$ — дефектные линейно независимые функционалы отображения Λ. Известно [1], что $G : B \to D$ есть $\mathcal{G}$-отображение в том и только том случае, когда δG есть фредгольмово (нётерово индекса нуль) отображение в B, а функционалы $r_j G, j = 1, \ldots, n$ ограничены. Представление о широте класса $\mathcal{G}$-отображений дают примеры, приведённые в работе [1]. Пусть инъекция Λ, порождающая пространство D, принадлежит классу Шэттена $\mathfrak{S}_q^s(B)$ при $q > q_0 \geqslant 1$. В этом случае все $\mathcal{G}$-отображения будут вполне непрерывными операторами, принадлежащими тому же классу Шэттена. На основе теоремы работы [3] доказаны следующие утверждения о полноте корневых векторов нётеровых операторов в пространстве B .

Т е о р е м а 1. *Пусть $G : B \to D$ есть инъективное $\mathcal{G}$-отображение с линейно независимыми дефектными функционалами $l_1, \ldots, l_n$. Пусть, далее, существует такой линейный ограниченный оператор $\mathfrak{L} : D \to B$, что сужение L оператора $\mathfrak{L}$ на подпространство $D_0 = \cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} l_i$ есть дискретный спектральный оператор в B, собственные значения λ которого, за исключением конечного числа точек, являются простыми полюсами резольвенты и лежат в некоторой полосе $|Im\lambda| \leqslant \mathrm{const}$. Если для некоторого регулярного значения μ разность $\delta G - \delta(L - \mu I)^{-1}$ вполне непрерывна, то G имеет полную в B систему корневых векторов. Кроме того, существует не менее $\nu = \max\{\dim \operatorname{Ker}(G - \lambda I) : \lambda \in \sigma(G)\}$ элементов $f_1, \ldots, f_\nu$ из B таких, что линейная оболочка семейства $\{G^k f_j : j = 1, \ldots, \nu, k = 0, 1, \ldots\}$ плотна в B .*

Т е о р е м а 2. *Пусть инъекция $\Lambda : B \to B$, порождающая пространство D, имеет вещественный спектр и её резольвента допускает оценку $\|(\Lambda - \lambda I)^{-1} \leqslant \gamma |Im\lambda|^{-1} (Im\lambda \neq 0)$. Пусть, далее, для линейного ограниченного оператора $\mathfrak{L} : D \to B$ имеет место разложение $\mathfrak{L}\Lambda = I - F_1 + F_2$, где $F_1 : B \to B$ такой линейный ограниченный оператор, что $\|F_1\| < (\gamma \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2q_0} + 2)^{-1}$, а линейный оператор $F_2 : B \to B$ вполне непрерывен. Если краевая задача $\mathfrak{L}x = f, r_j(x) = 0, j = 1, \ldots, n$ при $f = 0$ имеет лишь тривиальное решение, то она однозначно разрешима в D при любом $f \in B$, и оператор Грина этой задачи имеет полную в B систему корневых векторов. Кроме того, существует не менее $\nu = \max\{\dim \operatorname{Ker}(G - \lambda I) : \lambda \in \sigma(G)\}$ элементов $f_1, \ldots, f_\nu$ из B таких, что линейная оболочка семейства $\{G^k f_j : j = 1, \ldots, \nu, k = 0, 1, \ldots\}$ плотна в B .*

Обратимся к иллюстрации сформулированных утверждений.

Возьмём в качестве B банахово пространство L_p^μ суммируемых на $[a, b]$ со степенью $p > 1$ вектор-функций $x : [a, b] \to C^\mu$. Пусть D — пространство вектор-функций $x \in L_p^\mu$ с абсолютно непрерывной $(m-1)$-й производной и m-й производной $x^{(m)} \in L_p^\mu$. Изоморфизм между D и $L_p^\mu \times C^m, n = m\mu$ определим формулой Тейлора

$$x(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} x^{(m)}(s)\, ds + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{x^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j.$$

Можно показать, что оператор, порождённый в пространстве L_p^μ дифференциальным выражением $\mathfrak{L}x = (-1)^{m/2} x^{(m)}$ и периодическими краевыми условиями, удовлетворяет теореме 1.

Пусть оператор $T_1 : L_p^\mu \to L_p^\mu$ вполне непрерывен, а $T_2 : AC^{m-2}[a,b] \to L_p^\mu$ ограничен. Здесь $AC^{m-2}[a,b]$ — обычное банахово пространство вектор-функций с абсолютно непрерывной $(m-2)$-й производной. Если краевая задача

$$(-1)^{m/2}x^{(m)} + T_1x^{(m)} + T_2x = f, \quad x^{(j)}(a) = x^{(j)}(b), j = 0,\ldots,m-1$$

при $f = 0$ имеет только тривиальное решение, то оператор Грина G этой задачи существует и имеет полную в L_p^μ систему корневых векторов. Кроме того, существует не менее $\nu = \max\{\dim \mathrm{Ker}(G-\lambda I) : \lambda \in \sigma(G)\}$ элементов $f_1,\ldots,f_\nu$ из B таких, что линейная оболочка семейства $\{G^k f_j : j = 1,\ldots,\nu, k = 0,1,\ldots\}$ плотна в B .

Следующий пример относится к краевой задаче с квазипроизводной.

Пусть B есть гильбертово пространство $L_2[a,b]$ сумируемых с квадратом на $[a,b]$ скалярных функций, инъекция $\Lambda : B \to B$ задаётся равенством $(\Lambda f)(t) = \int_a^b W(t,s)f(s)\,ds$, где непрерывное симметричное ядро при $s \leqslant t$ определяется как $W(t,s) = w(s)(w(t)-w(b)$. Здесь

$$w(t) = \int_a^t h(s)\,ds/(\int_a^b h(s)\,ds)^{1/2},$$

а $h(s)$ — вещественнозначная суммируемая на $[a,b]$ функция, для которой $\int_a^b h(s)\,ds > 0$. Расширение образа ΛB произведём за счёт подпространства $\mathcal{E}$ с базисом $u_1 = 1, u_2 = w$. Пространство $D = \Lambda B \oplus \mathcal{E}$ представляет собой совокупность абсолютно непрерывных функций, для которых существует суммируемое с квадратом дифференциальное выражение $\delta x = (x'/h)'$.

Оператор Λ вполне непрерывен как оператор, действующий из B в пространство $AC[a,b]$ абсолютно непрерывных на [a,b] функций, снабжённое нормой $\|x\| = x(a) + \int_a^b |x'(s)|\,ds$.

Пусть $F : B \to B, T : AC[a,b] \to B$ — линейные ограниченные операторы, причём $\|F\| < 1/3$. Если краевая задача

$$\mathfrak{L}x \equiv (I-F)\delta x + Tx = f, \quad x(a) = x(b)$$

при $f = 0$ имеет только тривиальное решение, то оператор Грина G этой задачи существует и имеет полную в $L_2[a,b]$ систему корневых векторов. Кроме того, существует не менее $\nu = \max\{\dim \mathrm{Ker}(G-\lambda I) : \lambda \in \sigma(G)\}$ элементов $f_1,\ldots,f_\nu$ из B таких, что линейная оболочка семейства $\{G^k f_j : j = 1,\ldots,\nu, k = 0,1,\ldots\}$ плотна в B .

Список литературы

1. Исламов Г. Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. I // Дифференциальные уравнения, 1989. Т. 25. № 11. С. 1872–1881.
2. Исламов Г. Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. II // Дифференциальные уравнения, 1990. Т. 26. № 2. С. 224–232.
3. Исламов Г. Г. Об одной факторизации $\mathcal{G}$-отображений // Тезисы докладов 5-й Российской университетско-академической научно-практической конференции. Ч. 10. Ижевск, УдГУ, 2001. С. 13–14.

Исламов Галимзян Газизович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: gislamov@udm.ru