УДК 517.926+517.977

© **А. А. Козлов**

О ГЛОБАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами. Если управление u в системе (1) задано по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$, где $m \times n$-матрица U также предполагается ограниченной и кусочно-непрерывной, то (1) переходит в однородную замкнутую систему с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

и показателями Ляпунова [1, с. 245] $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU)$. В системе (2) матрица U (коэффициент обратной связи) может, в свою очередь, рассматриваться как новый управляющий параметр. Таким образом, естественно возникает задача глобального управления характеристическими показателями Ляпунова, в которой требуется построить для системы (1) такую обратную связь $u = U(t)x$, которая обеспечила бы равенства $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$, где $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ — заранее заданные вещественные числа. Эта задача является обобщением широко известной задачи о назначении спектра на случай нестационарных систем.

Существуют различные трактовки такого обобщения, см. например [2, с. 41], [3, с. 303–305]. Одна из них предложена Е. Л. Тонковым и заключается в использовании свойства равномерной полной управляемости [4, 5] системы (1). В [6] при условии равномерной полной управляемости системы (1) была доказана глобальная управляемость показателей системы (2) в том случае, когда матрица B кусочно равномерно непрерывна.

Если матрица $B(t)$ квадратная и является обратимой при всех $t \geqslant 0$, причем $B^{-1}(t)$ ограничена на всей положительной полуоси, то, независимо от характера непрерывности матрицы B, система (2), замкнутая управлением $\widetilde{U}(t) = B^{-1}(t)\big(\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) - A(t)\big)$, преобразуется к виду

$$\dot{x} = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

при этом, очевидно, будут справедливы равенства $\lambda_i(A + B\widetilde{U}) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$.

В докладе рассматривается вопрос о снятии условия кусочной равномерной непрерывности матрицы B в доказательстве глобальной управляемости показателей системы (2).

Введем необходимые обозначения. Пусть M_n — пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной операторной нормой, т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $E \in M_n$ — единичная матрица.

Для произвольной матрицы $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in M_n$ обозначим через $(H)_k \in M_k$ ее ведущую главную подматрицу [7, с. 479] порядка k, т.е. матрицу, составленную из элементов, стоящих в первых k столбцах и строках.

Зафиксируем число $\rho > 0$ и положим $\mathrm{H}(\rho) := \{H \in M_n : \det(H)_i \geqslant \rho, i = \overline{1,n}\}$ — множество матриц $H \in M_n$, для определителей всех ведущих главных подматриц которых выполняется неравенство $\det(H)_i \geqslant \rho$, $i = \overline{1,n}$.

В дальнейшем матричное управление U будем считать *допустимым*, если оно является кусочно-непрерывной и ограниченной на числовой прямой функцией со значениями в M_n.

Т е о р е м а 1. *Если для системы* (1) *существуют такие числа* $\sigma > 0$ *и* $\alpha > 0$, *что при всех* $t_0 \geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} |\det B(\tau)|\, d\tau \geqslant \alpha,$$

то существует такая величина $\theta = \theta(\rho) > 0$, *что при любом* $t_0 \geqslant 0$ *для всякой матрицы* $H \in \mathrm{H}(\rho)$ *найдется допустимое управление* U, *при любом* $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ *удовлетворяющее оценке* $\|U(t)\| \leqslant \theta \|H - E\|$ *и обеспечивающее для матрицы Коши системы* (2) *с этим управлением выполнение равенства*

$$X_U(t_0+\sigma, t_0) = X(t_0+\sigma, t_0)H,$$

где X(t,s), $t, s \in \mathbb{R}$ *— матрица Коши системы* (2) *с нулевым управлением.*

Т е о р е м а 2. *Если выполняются условия теоремы* (1), *то для любых вещественных чисел* $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ *существует такое допустимое управление* U, *что для показателей Ляпунова системы* (2) *с этим управлением имеют место равенства*

$$\lambda_i(A+BU) = \mu_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

В доказательстве этих теорем используются методы, предложенные в [6].

Список литературы

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука. 1966. 576 с.
2. Смирнов Е. Я. Стабилизация программных движений. С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та. 1997. 308 с.
3. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси. 1999. 409 с.
4. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
5. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Т. 5. № 1. С. 102–119.
6. Попова С. Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир. 1989. 655 с.

Козлов Александр Александрович
Институт математики НАН Беларуси,
Республика Беларусь, Минск
e-mail: kozlovaa@tut.by