УДК 519.622.2

© **Н. Г. Колмогорцева, А. С. Боярченков**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ[1]

## Введение

Настоящая работа посвящена моделированию функционально-дифференциальных уравнений на основе разложений решений в ряды Тейлора. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

## § 1. Постановка задачи

Рассматривается задача нахождения приближенного решения функционально-дифференциального уравнения вида

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x_t(\cdot)\big) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \quad x_{t_0}(s) = y^0(s), \ -\tau \leqslant s < 0. \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – конечномерная составляющая решения, $x_t(\cdot) = \big\{x(t+s), -\tau \leqslant s < 0\big\}$ – функция-предыстория решения, $\tau = \mathrm{const} > 0$.

## § 2. Формула Тейлора

Рассматриваемый метод построения приближенного решения задачи (1), (2) основывается на его разложении по формуле Тейлора с использованием инвариантных производных [1, 2] правой части уравнения (1). Обозначим через $Q^p[-\tau, 0)$ множество $p$ раз кусочно дифференцируемых $n$-мерных функций, заданных на полуинтервале $[-\tau, 0)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть отображение* $f = f\big(t, x, y(\cdot)\big) \in R^n$ *определено при всех* $t \in R$, $x \in R^n$, $y(\cdot) \in Q^p[-\tau, 0)$ *и имеет в каждой точке* $\big(t, x, y(\cdot)\big)$ *частные производные по* $t$, $x$ *и инвариантные производные по* $y(\cdot)$ *до p-го порядка включительно. Пусть* $y^0(\cdot) \in Q^p[-\tau, 0)$. *Тогда для любого* $t_* \geqslant t_0$ *для решения задачи* (1), (2) *справедливо разложение*

$$x(t) = x(t_*) + \sum_{k=1}^{p} x_*^{(k-1)} \frac{(t-t_*)^k}{k!} + o\big((t-t_*)^p\big), \quad t \geqslant t_*,$$

*где* $x_*^{(k)}$ *– k-я полная правая производная отображения f в силу системы* (1), *посчитанная в точке* $\big(t_*, x(t_*), x_{t_*}(\cdot)\big)$.

## § 3. Численная процедура

Рассмотрим метод 3-го порядка нахождения приближенного решения $u(t)$ задачи (1), (2), который строится по шагам $t_l \leqslant t < t_{l+1}$ на основе следующего разложения:

$$u(t_l + \Delta) = u(t_l) + C_1\big(t_l, u(t_l), u_{t_l}(\cdot)\big)\Delta + C_2\big(t_l, u(t_l), u_{t_l}(\cdot)\big)\frac{\Delta^2}{2!} + C_3\big(t_l, u(t_l), u_{t_l}(\cdot)\big)\frac{\Delta^3}{3!}.$$

Для простоты остановимся на линейном случае: $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau)$. При реализации метода интервал $[t_0, t_0 + \vartheta]$, где $\vartheta > 3\tau$, разбивается на 4 подынтервала: **1)** $[t_0, t_0 + \tau]$;

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-01-00330, 05-01-00732), программы Президиума РАН "Процессы управления" и Урало-сибирского интердисциплинарного проекта

**2)** $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$, **3)** $[t_0+2\tau, t_0+3\tau]$, **4)** $[t_0+3\tau, t_0+\vartheta]$. На каждом из них строится своя численная схема. Матрица коэффициентов определяется согласно равенству

$$C_k^{(i)}\big(t_l, x(t_l), x_{t_l}(\cdot)\big) = A\,\frac{d^{k-1}x(t_l)}{dt^{k-1}} + B\,\frac{d^{k-1}x(t_l-\tau)}{dt^{k-1}}, \quad i=1,2,3,4,\ k=1,2,3.$$

Проводя вычисления, для коэффициентов, лежащих ниже диагонали и на диагонали $(i \leqslant k)$, получаем следующие формулы.
<u>Для первого интервала $[t_0, t_0+\tau]$</u>:

$$\begin{aligned}
C_1^{(1)} &= Ax(t_l) + By^0(t_l-\tau),\\
C_2^{(1)} &= A^2x(t_l) + ABy^0(t_l-\tau) + Bdy^0(t_l-\tau)/dt,\\
C_3^{(1)} &= A^3x(t_l) + A^2By^0(t_l-\tau) + ABdy^0(t_l-\tau)/dt + Bd^2y^0(t_l-\tau)/dt^2.
\end{aligned}$$

<u>Для второго интервала $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$</u>:

$$\begin{aligned}
C_2^{(2)} &= A^2x(t_l) + 2ABx(t_l-\tau) + B^2y^0(t_l-2\tau),\\
C_3^{(2)} &= A^3x(t_l) + 3A^2Bx(t_l-\tau) + 2AB^2y^0(t_l-2\tau) + B^2dy^0(t_l-2\tau)/dt.
\end{aligned}$$

<u>Для третьего интервала $[t_0+2\tau, t_0+3\tau]$</u>:

$$C_3^{(3)} = A^3x(t_l) + 3A^2Bx(t_l-\tau) + 3AB^2x(t_l-2\tau) + B^2y^0(t_l-3\tau).$$

Для коэффициентов, лежащих выше диагонали ( $i > k$ ), имеем

$$\begin{aligned}
C_1^{(i)} &= Ax(t_l) + Bx(t_l-\tau),\\
C_2^{(i)} &= A^2x(t_l) + 2ABx(t_l-\tau) + B^2\,x(t_l-2\tau),\\
C_3^{(i)} &= A^3x(t_l) + 3A^2Bx(t_l-\tau) + 3AB^2\,x(t_l-2\tau) + B^2\,x(t_l-3\tau).
\end{aligned}$$

## § 4. Вычислительные эксперименты

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что метод разложения в ряд Тейлора позволяет получить решение систем функционально-дифференциальных уравнений с высокой точностью. Преимуществом данного численного метода по сравнению с другими является возможность построения схемы любого порядка. Недостатком является тот факт, что схемы с высоким порядком точности содержат громоздкие формулы, что приводит к длительным по времени вычислениям.

## Список литературы


1. Ким А. В., Пименов В. Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2004. 256 с.
2. Ким А. В., Колмогорцева Н. Г. Моделирование уравнений с последействием на основе разложения в ряд Тейлора по инвариантным и коинвариантным производным // Вестник УГТУ-УПИ. Информационные системы и технологии в радиотехнике, связи, автоматике и управлении: Серия радиотехническая. 2005. № 17(69). С. 269–278.



Колмогорцева Наталья Геннадьевна
Политехнический институт (филиал)
УГТУ-УПИ в г. Каменске-Уральском,
Россия, Каменск-Уральский
e-mail: nata_200468@mail.ru

Боярченков Антон Сергеевич
Уральский государственный
университет,
Россия, Екатеринбург
e-mail: ant@timus.ru