УДК 517.934

© А. И. Коробко

ПРИНЦИП ПЛОТНОСТИ И АППРОКСИМАЦИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

§ 1. Обозначения и определения

Пусть X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Обозначим $B_X[x,\epsilon]$ — открытый шар пространства X с центром в точке $x\in X$ и радиусом $\varepsilon>0$, если $\varepsilon=0$, то $B_X[x,0]\equiv x$. Пусть $U\subset X$. Тогда $\overline{U}$ — замыкание множества U; $\mathrm{co}U$ — выпуклая оболочка множества U; $\overline{\mathrm{co}}U=\overline{\mathrm{co}U}$; $\mathrm{ext}U$ — множество крайних точек множества U, $\overline{\mathrm{ext}}U=\overline{\mathrm{ext}U}$; $\|U\|_X=\sup\limits_{x\in U}\|u\|_X$; $\Omega(U)$ — множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств множества U; $U^\varepsilon\equiv\overline{\bigcup\limits_{u\in U}B[u,\varepsilon]}$, если $\varepsilon>0$ и $U^0\equiv\overline{U}$; $\rho_X[x,U]$ — расстояние от точки $x\in X$ до множества U в пространстве X; h_X — расстояние по Хаусдорфу в пространстве X соответствующих множеств; $\mathrm{comp}[X]$ $(\mathrm{cl}[X])$ — множество всех непустых компактов (всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств) пространства X.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $C^n[a,b]$, $(L^n[a,b])$ пространство непрерывных (суммируемых по Лебегу) функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]}=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$ $(\|x\|_{L^n[a,b]}=\int\limits_a^b|x(s)|ds)$.

Пусть $\Phi\subset L^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению*, если для любых $x,y\in\Phi$ и любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ выполняется включение $\chi(\mathcal{U})x+\chi([a,b]\backslash\mathcal{U})y\in\Phi$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим через $\mathcal{S}[L^n[a,b]]$ множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a,b]$.

§ 2. Основной результат

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x\in\Psi(x)+V\Phi(x),\tag{1}$$

где отображения $\Psi:C^n[a,b]\to\mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi:C^n[a,b]\to\mathcal{S}[L^n[a,b]]$ — непрерывны по Хаусдорфу, $V:L^n[a,b]\to C^n[a,b]$ – линейный непрерывный интегральный оператор. Включение (1) назовем *возмущенным включением* (см. [1]).

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x\in\Psi(x)+V\overline{\mathrm{co}}\Phi(x).\tag{2}$$

Включение (2) будем называть *«овыпукленным»* возмущенным включением.

Обозначим через $P(C^n[a,b]\times[0,\infty))$ ($\widetilde{P}(C^n[a,b]\times[0,\infty))$) множество всех непрерывных функций $q:C^n[a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, для которых для любого $x\in C^n[a,b]$ справедливо соотношение $q(x,0)=0$ $(q(x,0)=0$ и любых $(x,\delta)\in C^n[a,b]\times(0,\infty)$ выполняется неравенство $q(x,\delta)>0)$.

Пусть U — непустое выпуклое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\omega\in\widetilde{P}(C^n[a,b]\times[0,\infty))$. Пусть $H(U)$, $H_{\mathrm{co}}(U)$ — множество решений включений (1) и (2) соответственно. Рассмотрим многозначное отображение $M_U(\omega):U\times[0,\infty)\to\Omega(U)$, определенное равенством

$$M_U(\omega)(x,\delta)=\overline{B_{C^n[a,b]}[x,\omega(x,\delta)]}\bigcap U.\tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00324).

Далее пусть $\eta \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ и $\sigma, \theta, \xi \in \widetilde{P}(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. Для определения приближенного решения включения (1) рассмотрим отображения $\Psi_\sigma : U \times [0,\infty) \to \mathrm{cl}[C^n[a,b]]$, $\Phi_{\eta,\theta} : U \times [0,\infty) \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$, которые имеют вид

$$\Psi_{\xi,\sigma}(x,\delta) = \Big(\Psi\big(M_U(\sigma)(x,\delta)\big)\Big)^{\xi(x,\delta)}, \tag{4}$$

$$\Phi_{\eta,\theta}(x,\delta) = \Big(\Phi\big(M_U(\theta)(x,\delta)\big)\Big)^{\eta(x,\delta)}, \tag{5}$$

где отображения $M_U(\sigma) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$, $M_U(\theta) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$ заданы равенством (3), в котором ω соответственно равны σ и θ.

На выпуклом замкнутом множестве $U \subset C^n[a,b]$ для каждого $\delta > 0$ рассмотрим включение

$$x \in \Psi_{\xi,\sigma}(x,\delta) + V\Phi_{\eta,\theta}(x,\delta), \tag{6}$$

где $\xi \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$, отображения $\Psi_{\xi,\sigma} : U \times [0,\infty) \to \mathrm{cl}[C^n[a,b]]$, $\Phi_{\eta,\theta} : U \times [0,\infty) \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$, определены равенствами (4), (5). Включение (6) будем называть включением с *внутренними* и *внешними возмущениями.*

При каждом $\delta > 0$ через $H_{\eta(\delta),\theta(\delta),\sigma(\delta),\xi(\delta)}(U)$, обозначим множество решений включения (6) принадлежащих множеству $U \subset C^n[a,b]$.

Пусть $U \subset C^n[a,b]$. По аналогии с [1,2], будем говорить, что для включения (1) выполняется *принцип плотности* (*условие плотности*) *на множестве* U, если справедливо равенство

$$\overline{H(U)} = H_{\mathrm{co}}(U), \tag{7}$$

где $\overline{H(U)}$ — замыкание множества $H(U)$ в пространстве $C^n[a,b]$. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если U — непустое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, то для выполнения равенства*

$$\overline{H(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\theta(\delta),\sigma(\delta),\xi(\delta)}(U^\delta)}, \tag{8}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta),\theta(\delta),\sigma(\delta),\xi(\delta)}(U^\delta)}$ — замыкания в $C^n[a,b]$ множества решений $H_{\eta(\delta),\theta(\delta),\sigma(\delta),\xi(\delta)}(U^\delta)$ соответственно, для любых $\eta \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ и $\xi, \sigma, \theta \in \widetilde{P}(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ достаточно, а если U — непустое выпуклое компактное множество, то и необходимо выполнение принципа плотности на множестве $U \subset C^n[a,b]$.

Список литературы

1. Булгаков А. И., Беляева О. П., Григоренко А. А. К теории возмущенных включений и о ее приложениях. // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 10. С. 21–78.
2. Булгаков А. И., Скоморохов В. В. Аппроксимация дифференциальных включений // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 35–52.

Коробко Анатолий Иванович
Тамбовский государственный ун-т,
Россия, Тамбов
e-mail: prof13@yandex.ru