УДК 517.911

© **Д. А. Короткий**

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ОПЕРЕЖЕНИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием следующего вида

$$\dot{x}(t) = F\big(t, x(t), x(t-\tau), x(t+\tau)\big), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1.1}$$

где τ — величина запаздывания и опережения (величины запаздывания и опережения считаются одинаковыми), $-\infty < a < b < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, F — n-мерная вектор-функция, определенная на множестве $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая следующим условиям:
1) F — непрерывна по совокупности аргументов на $[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;
2) F — липшицева по второму, третьему и четвертому аргументам, т.е. существуют такие неотрицательные константы L_x, L_y, L_z, что для любых x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$, y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^n$, z_1, $z_2 \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$\| F(t, x_1, y_1, z_1) - F(t, x_2, y_2, z_2) \| \leqslant L_x \|x_1 - x_2\| + L_y \|y_1 - y_2\| + L_z \|z_1 - z_2\|.$$

Пусть заданы также какой-нибудь элемент $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и какие-нибудь непрерывные n-мерные вектор-функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, определенные на промежутках $[a-\tau, a)$ и $(b, b+\tau]$ соответственно. Будем считать, что вектор-функция $\varphi(\cdot)$ имеет конечный односторонний предел в точке $t = a$, а вектор-функция $\psi(\cdot)$ имеет конечный односторонний предел в точке $t = b$ (можно считать, что функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ доопределены соответственно в точках a и b по непрерывности). Пусть также $l = b - a \geqslant \tau > 0$.

Под решением системы (1.1) будем понимать кусочно-непрерывную n-мерную вектор-функцию $x = x(t)$, $a - \tau \leqslant t \leqslant b + \tau$, которая непрерывна на отрезке $[a,b]$, почти во всех точках этого отрезка дифференцируема и удовлетворяет системе (1.1), в точке $t = a$ принимает значение x_0, на промежутке $[a-\tau, a)$ совпадает с функцией $\varphi(\cdot)$, а на промежутке $(b, b+\tau]$ совпадает с функцией $\psi(\cdot)$

$$x(t) = \varphi(t),\ a - \tau \leqslant t < a; \quad x(a) = x_0; \quad x(t) = \psi(t),\ b < t \leqslant b + \tau. \tag{1.2}$$

Требуется исследовать вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (1.1) – (1.2), исследовать свойства решения, а также разработать методы приближенного нахождения этого решения.

§ 2. Теорема существования и единственности

Т е о р е м а 1. *Если при некотором $\lambda > 0$ выполняется условие*

$$\sigma_\lambda = \Big[\ L_x \frac{1 - e^{-\lambda l}}{\lambda} + L_y \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(l+\tau)}}{\lambda} + L_z \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau - l)}}{\lambda}\ \Big] < 1\ ,$$

то краевая задача (1.1) – (1.2) имеет единственное решение. Имеет место непрерывная зависимость решения (в равномерной метрике) от начальных данных: начального состояния x_0, начальной функции φ и финальной функции ψ, при варьировании последних в нормах пространств $\mathbb{R}^n$, $C[a, a-\tau]$ и $C[b, b+\tau]$ соответственно.

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 05-01-00330).

§ 3. Численное моделирование

Проведем дискретизацию задачи, используя явную схему Эйлера. Для простоты будем считать, что $b-a=k\tau$, $k\in\mathbb{N}$. В схеме Эйлера будем использовать постоянный шаг дискретизации Δ, пусть для простоты он входит целое число раз в величину запаздывания, т.е. $\Delta=\tau/m$, где $m\in\mathbb{N}$. Тогда $b=a+\tau k=\ a+\Delta km=\ a+\Delta p$, где $p=km$.

Введем сеточное разбиение отрезка $[a-\tau,b+\tau]$ точками $t_i\in\{t_i\}_{i=-m}^{p+m}$:

$$t_i=a+\Delta\cdot i \quad (\ t_{-m}=a-\tau,\ \dots,\ t_0=a,\ \dots,\ t_p=b,\ \dots,\ t_{p+m}=b+\tau\ ).$$

Обозначим

$$\varphi(t_i)=\varphi^i\ , \quad i=-m,\dots,-1\ ; \qquad \psi(t_i)=\psi^i\ , \quad i=p+1,\dots,p+m\ .$$

Пусть $x(t)$ — точное решение задачи (1.1) – (1.2). Будем искать приближение

$$u^i\approx x^i=x(t_i) \quad (\ u^i_k\approx x^i_k=x_k(t_i)\ , \quad k=1,...,n\ )\ , \quad i=1,...,p\ .$$

Исходное дифференциальное уравнение аппроксимируем разностной схемой

$$u^{i+1}=u^i+\Delta\,F\big(t_i,u^i,u^{i-m},u^{i+m}\big)\ , \quad i=0,\dots,p-1\ .$$

Получаем систему нелинейных уравнений для нахождения неизвестных $u^i,\ i=1,...,p$:

$$\begin{cases} u^{-m}=\varphi^{-m} \\ \dots \\ u^{-1}=\varphi^{-1} \\ u^0=x_0 \\ u^{i+1}=u^i+\Delta F\big(t_i,u^i,u^{t-\tau},u^{t+\tau}\big)\ , \quad \text{i = 0, ... , p - 1}\ , \\ u^{p+1}=\psi^{p+1} \\ \dots \\ u^{p+m}=\psi^{p+m}\ . \end{cases}$$

Эту систему представим в виде $U=G(U)$ и для ее решения воспользуемся методом простых итераций: $U^{k+1}=G(U^k)$. Указываются некоторые условия, при которых этот численный метод сходится к точному решению.

Список литературы

1. Андреева Е. А., Колмановский В. Б.., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.
2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференцальных уравнений. М.: Наука, 1991.
3. Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Издательство МАИ, 1992.
4. Ким А. В., Пименов В. Г. i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнения. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
5. Baotong C. Functional differential equations mixed type in Banach spaces // Rend. Sem.Univ. Padova. 1995. Vol. 94. P. 47–54.
6. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высшая школа, 2000.

Короткий Дмитрий Александрович
Уральский государственный университет,
Россия, Екатеринбург
e-mail: Dimkorot@rambler.ru