

УДК 517.977

© Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова

**К МЕТОДУ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЗАДАЧ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ<sup>1</sup>****Введение**

На основе задачи об устойчивом отслеживании движения модели движением управляемого объекта в системе с последствием, подверженной неопределенным и стохастическим помехам, обсуждается метод функций Ляпунова [1], которые сопоставляются историям движений или мгновенным фазовым состояниям. Основное внимание уделяется стабилизации процесса воздействиями, которые формируются по принципу обратной связи в дискретной по времени схеме на основе пошаговых вероятностных испытаний по выбору этих управляющих воздействий.

**§ 1. Постановка задачи**

Управляемый  $x$ -объект описывается дифференциальным уравнением Ито [2],[3], правая часть которого зависит от истории движения, управляющих воздействий, не малой неопределенной помехи и малых возмущений – детерминированного и броуновского. Движение  $z$ -модели описывается дифференциальным уравнением, правая часть которого имеет исходную структуру, подобную правой части уравнения для  $x$ -объекта. Однако, правая часть уравнения для  $z$ -модели получается усреднением ее исходной структуры по элементам, имеющим тот же смысл, как и те элементы в уравнении для  $x$ -объекта, которые формируются там на базе вероятностных процедур. Специфика системы – в числе управляющих воздействий и помех – запаздывания во времени.

Задача состоит в построении вероятностного механизма управления, который при оговариваемых ограничениях на управляющие воздействия, помехи, исходные истории и шаг дискретного по времени управления, обеспечивает сильную устойчивость по вероятности [4]–[7] движения  $y[t] \equiv \bar{0}$ . Здесь  $y[t] = x[t] - z[t]$ ;  $x[t], z[t]$  –  $n$ -мерные векторы. Управляющие воздействия назначаются в момент времени  $t_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$  по реализовавшейся истории

$$\left\{ x[t_l, \bullet] = (x[t_l + \vartheta], -h \leq \vartheta \leq 0), z[t_l, \bullet] = (z[t_l + \vartheta], -h \leq \vartheta \leq 0); h = \text{const} > 0 \right\}.$$

Реализации управляющих воздействий и помех предполагаются независимыми в оговариваемом смысле. Установленные оценки качества процесса должны носить характер гарантированного результата по отношению к допустимой совокупности помех.

**§ 2. Метод решения**

Решение опирается на теорию устойчивости движения, развитую для обыкновенных, наследственных и стохастических систем [1], [4]–[11]. Существенно используется теория стохастических дифференциальных уравнений [2],[3],[12]. Определяющим инструментом для формирования управляющих воздействий являются функционалы Ляпунова  $V$ . В рассматриваемых случаях стохастических уравнений искомое управление строится по правилу экстремального сдвига [13], [14] на базе усредненных производных функционала  $V$  на движениях системы. Результаты обосновываются с использованием дифференциальных и дифференциально-интегральных формул Ито [2],[3] и Дынкина [12].

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00436) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-8512.2006.1

### § 3. Комментарий к методу функций Ляпунова

Обсуждаются некоторые теоремы метода функций и функционалов Ляпунова в приложении к обыкновенным, наследственным и стохастическим системам. В том числе обсуждаются аспекты, восходящей к Б.С.Разумихину [15] идеи использования функций Ляпунова в приложении к наследственным системам. Делается акцент на логические свойства посылки в подобных теоремах с позиции закона де Моргана. Обсуждение сопровождается субъективными историческими справками.

### § 4. Некоторые результаты

Как конкретный пример устанавливается утверждение: при оговариваемых ограничениях на параметры уравнения, управляющие воздействия и помехи, исходную историю и шаг дискретной по времени схемы управления при отслеживании на конечном отрезке времени  $[t_*, T]$  или на бесконечном полуинтервале  $[t_*, \infty)$  гарантируются соответственно неравенства:

$$P\left(\sup_{t_* \leq t \leq T} |y[t]| < \varepsilon\right) > \beta, \quad P\left(\sup_{t_* \leq t < \infty} |y[t]| < \varepsilon\right) > \beta.$$

Здесь  $P(\bullet)$  – вероятность,  $\varepsilon > 0$ ,  $\beta < 1$  – наперед заданные числа,  $t_*$  – исходный момент времени.

### Список литературы

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат. 1950
2. Ito K., Nisio M. On stationary solutions of stochastic differential equations // J.Math. Kyoto Univ. 1964. 4,1 , P.1-79.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва <Наука>. 1974
4. Harold J. Kushner Stochastic Stability and Control. New York-London.: Academic Press. 1967
5. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1969.
6. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука. 1981.
7. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика, 1960. Т. 24. вып.5.
8. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи матем. наук. 1949. Вып.5. С.99-141.
9. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's Second Method // Math. Soc. Japan. 1966.
10. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М.: Мир. 1984.
11. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959.
12. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз. 1963.
13. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.
14. Осипов Ю. С. К теории дифференциальных игр систем с последействием // ПММ. 1971. Т. 35. вып.5.
15. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. №3, С.500-512.

Красовский Николай Николаевич  
Институт математики и механики  
УрО РАН, Россия, Екатеринбург  
e-mail: nnkras@imm.uran.ru

Котельникова Анна Николаевна  
Институт математики и механики  
УрО РАН, Россия, Екатеринбург  
e-mail: annk222@rambler.ru