УДК 519.218

© **А. А Леваков, М. М. Васьковский**

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in f(t,x(t))\,dt + g(t,x(t))\,dW(t), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

с измеримыми по Борелю многозначными отображениями $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to cl(\mathbb{R}^d)$,

$$g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to cl(\mathbb{R}^{d\times d}), \quad f = (f^i),\ i = 1,\ldots,d, \quad g = (g^{ij}),\ i,j = 1,\ldots,d.$$

Для отображения $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to cl(\mathbb{R})$, непрерывного по переменным $(x_{\alpha_{l+1}},\ldots,x_{\alpha_d})$ при каждых фиксированных $(t,x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_l})$, построим множество $H_h = \big\{(t,x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_l})\big|$ для любой открытой в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ окрестности $U(t,x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_l})$ точки $(t,x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_l})$ существует $a > 0$, что

$$\int\limits_{U(t,x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_l})} \sup_{(x_{\alpha_{l+1}},\ldots,x_{\alpha_d})\in B_2(0,a)} \Big(\inf_{y(t,x)\in g(t,x)} \det \sigma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(\tau,x_1,\ldots,x_d)\Big)^{-1} d\tau\, dx_{\alpha_1}\,\ldots\, dx_{\alpha_l} = \infty\Big\},$$

где $\sigma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}(t,x_1,\ldots,x_d) = \begin{pmatrix} y_{\alpha_1} \\ \ldots \\ y_{\alpha_l} \end{pmatrix} (y^T_{\alpha_1}\ldots y^T_{\alpha_l})$, $y_{\alpha_i} - \alpha_i$-я строка матрицы y, являющейся селектором отображения g, $B_2(0,a) = \Big\{(x_{\alpha_{l+1}},\ldots,x_{\alpha_d})\,\Big|\, \sqrt{x^2_{\alpha_{l+1}} + \ldots + x^2_{\alpha_d}} \leqslant a\Big\}$.

Построим отображения

$$F^i(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\ f^i\big(t,[x]_\delta\big), \quad A^{ij}(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\ \sigma^{ij}\big(t,[x]_\delta\big), \quad i,j = 1,\ldots,d,$$

где $\sigma(t,x) = \big\{y(t,x)y^T(t,x)\,\big|\, y(t,x) \in g(t,x)\big\}$, $\sigma = (\sigma^{ij}),\ \ i,j = 1,\ldots,d$.

Пусть

$$A_0^{ij}(t,x) = \begin{cases} \sigma^{ij}(t,x), & (t,x) \in H^c_{\sigma^{ij}} \times \mathbb{R}^{d-l}, \\ A^{ij}(t,x), & (t,x) \in H_{\sigma^{ij}} \times \mathbb{R}^{d-l}, \end{cases}$$

$$F_0^{i}(t,x) = \begin{cases} f^{i}(t,x), & (t,x) \in H^c_{f^i} \times \mathbb{R}^{d-l}, \\ F^{i}(t,x), & (t,x) \in H_{f^i} \times \mathbb{R}^{d-l}, \end{cases}$$

$A_0(t,x) = \Big(A_0^{ij}(t,x)\Big)$, $\ i,j = 1,\ldots,d,\qquad F_0(t,x) = \big(F_0^i(t,x)\big)$, $\ i = 1,\ldots,d$,
$G_0(t,x) = \Big\{b^{\frac{1}{2}}(t,x)\,\Big|\, b(t,x) \in A_0(t,x)\Big\}$, где H_{f^i}, $H_{\sigma^{ij}}$ — множества, описанные выше,

$$H^c_{f^i} = \big\{(t,x_{i_1},\ldots,x_{i_l})\,\big|\, t \in \mathbb{R}_+,\ x_{i_1} \in \mathbb{R},\ldots,x_{i_l} \in \mathbb{R}\big\} \backslash H_{f^i},$$
$$H^c_{\sigma^{ij}} = \big\{(t,x_{ij_1},\ldots,x_{ij_l})\,\big|\, t \in \mathbb{R}_+,\ x_{ij_1} \in \mathbb{R},\ldots,x_{ij_l} \in \mathbb{R}\big\} \backslash H_{\sigma^{ij}}.$$

Под β-слабым решением включения (1) понимаем процесс $x(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, такой, что

1) существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки $e : \Omega \to [0,+\infty]$;

2) процесс $x(t)1_{[0,e)}(t)$ $(\mathcal{F}_t)$-согласован и имеет непрерывные траектории при $t < e$, где 1_D — характеристическая функция множества D;

3) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;

4) существуют процессы $v(t), u(t)$, заданные на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такие, что процессы $v(t)1_{[0,e)}(t)$, $u(t)1_{[0,e)}(t)$ измеримы, $(\mathcal{F}_t)$-согласованы и для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$

$$v(t)1_{[0,e)}(t) \in F_0\big(t, x(t,\omega)\big)1_{[0,e)}(t),$$
$$u(t)1_{[0,e)}(t) \in G_0\big(t, x(t,\omega)\big)1_{[0,e)}(t);$$

5) с вероятностью 1 для всех $t \in [0,e)$

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t v(\tau)d\tau + \int\limits_0^t u(\tau)dW(\tau).$$

Т е о р е м а 1. *Если отображения f, g измеримы по Борелю и локально ограничены, то для любой заданной вероятности ν на $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ включение (1) имеет β-слабое решение с начальным распределением ν.*

Леваков Анатолий Афанасьевич
Белорусский государственный ун-т
Беларусь, Минск
e-mail: maks260786@mail.ru

Васьковский Максим Михайлович
Белорусский государственный ун-т,
Беларусь, Минск
e-mail: maks260786@mail.ru