УДК 517.977

© **Н. Ю. Лукоянов**

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛА ЦЕНЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С НАСЛЕДСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ[1]

В рамках подхода [1] рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой $y[\cdot] = \big\{y[\tau] \in \mathbb{R}^n,\, t_* \leqslant \tau \leqslant T\big\}$ на отрезке времени $[t_*, T]$ описывается уравнением

$$\mathrm{d}y[\tau]/\mathrm{d}\tau = f\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u[\tau], v[\tau]\big),\ t_* \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T \tag{1}$$

с начальным условием

$$y[t_*[\cdot]t] = x[t_*[\cdot]t] \in C\big([t_*, t], \mathbb{R}^n\big). \tag{2}$$

Здесь $y[t_*[\cdot]\tau]$ — история движения, сложившаяся к моменту τ (сужение $y[\cdot]$ на $[t_*, \tau]$), $u[\tau] \in \mathbb{P}$ — текущее воздействие управления, $v[\tau] \in \mathbb{Q}$ — воздействие помехи, $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ — компакты конечномерных арифметических пространств, t — момент начала процесса управления, $x[t_*[\cdot]t]$ — начальная история. Пусть качество процесса управления оценивается показателем

$$\gamma = \sigma\big(y[\cdot]\big) - \int\limits_t^T h\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u[\tau], v[\tau]\big)\,\mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

Цель управления — доставить показателю (3) как можно меньшее значение. Действия помехи непредсказуемы и могут быть самыми неблагоприятными.

Полагаем выполненными следующие условия.

(C1) Отображения $f = f\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v\big) \in \mathbb{R}^n$ и $h = h\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v\big) \in \mathbb{R}$ определены при всех $\tau \in [t_*, T]$, $y[t_*[\cdot]\tau] \in C\big([t_*, \tau], \mathbb{R}^n\big)$, $u \in \mathbb{P}$, $v \in \mathbb{Q}$, непрерывны по совокупности переменных $\big(y[t_*[\cdot]\tau], u, v\big)$ при любом фиксированном τ и непрерывны по совокупности переменных (τ, u, v) вдоль любой фиксированной функции $y[\cdot] \in C\big([t_*, T], \mathbb{R}^n\big)$, причем для любого компакта $D \subset C\big([t_*, T], \mathbb{R}^n\big)$ — равностепенно относительно $y[\cdot] \in D$.

(C2) Имеет место оценка

$$\Big(\big\|f\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v\big)\big\|^2 + h^2\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v\big)\Big)^{1/2} \leqslant L\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]\big) = \Big(1 + \max_{t_* \leqslant \xi \leqslant \tau} \|y[\xi]\|\Big)\, c.$$

(C3) Существует неотрицательный ci-гладкий функционал [2]

$$\Big\{\tau \in [t_*, T],\ w[t_*[\cdot]\tau] \in C\big([t_*, \tau], \mathbb{R}^n\big)\Big\} \mapsto \nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon\big(\tau, w[t_*[\cdot]\tau]\big) \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

такой, что

- $\nu_\varepsilon\big(\tau, w[t_*[\cdot]\tau] \equiv 0\big) \leqslant \varepsilon$;
- для любых чисел $R, \mu > 0$ существует $\varepsilon > 0$, при котором для всех $y[\cdot], z[\cdot] \in D_0$, где D_0 — множество удовлетворяющих начальному условию (2) решений дифференциального неравенства $\big\|\mathrm{d}y[\tau]/\mathrm{d}\tau\big\| \leqslant L\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]\big)$, $t \leqslant \tau \leqslant T$, неравенство $\nu_\varepsilon\big(T, w[t_*[\cdot]T]\big) < R$, где $w[\cdot] = y[\cdot] - z[\cdot]$, влечет неравенство $\big|\sigma\big(y[\cdot]\big) - \sigma\big(z[\cdot]\big)\big| < \mu$;
- при любых $\tau \in [t_*, T)$, $y[\cdot], z[\cdot] \in D_0$ для $w[\cdot] = y[\cdot] - z[\cdot]$ справедливо неравенство
  $$\partial_\tau \nu_\varepsilon\big(\tau, w[t_*[\cdot]\tau]\big) + H\Big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], \nabla\nu_\varepsilon\big(\tau, w[t_*[\cdot]\tau]\big)\Big) - H\Big(\tau, z[t_*[\cdot]\tau], \nabla\nu_\varepsilon\big(\tau, w[t_*[\cdot]\tau]\big)\Big) \leqslant 0,$$
  где $\partial_\tau \nu_\varepsilon$ и $\nabla \nu_\varepsilon$ — ci-производная по τ и ci-градиент функционала ν_ε,
  $$H\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], s\big) = \min_{u \in \mathbb{P}} \max_{v \in \mathbb{Q}} \Big[\big\langle s, f\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v\big)\big\rangle - h\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v\big)\Big].$$

(C4) Функционал $\sigma : C\big([t_*, T], \mathbb{R}^n\big) \mapsto \mathbb{R}$ непрерывен.

---

[1]Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ НШ-8512.2006.1 и МД-6133.2006.1.

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение векторов.

Стратегию управления отождествляем с произвольной функцией $U = U\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]\big) \in \mathbb{P}$. Управление на базе стратегии U осуществляется в дискретной по времени схеме. Выбирается разбиение отрезка времени $[t,T]$: $\Delta = \{\tau_i:\ \tau_1 = t,\ \tau_{i+1} > \tau_i,\ i = 1,\ldots,N,\ \tau_{N+1} = T\}$, и последовательно по шагам этого разбиения в цепи обратной связи формируется реализация управления

$$u[\tau] = U\big(\tau_i, y[t_*[\cdot]\tau_i]\big),\ \tau_i \leqslant \tau < \tau_{i+1},\ i = 1,\ldots,N. \tag{4}$$

Через $S\big(t, x[t_*[\cdot]t], U, \Delta\big)$ обозначаем множество всех возможных троек $\big\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\big\}$, таких, что $v[\cdot]: [t,T) \mapsto \mathbb{Q}$ — измеримая функция, $u[\cdot]$ — кусочно постоянная функция вида (4), $y[\cdot]: [t_*,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ — удовлетворяющая (2) непрерывная функция, которая на $[t,T]$ абсолютно непрерывна и почти всюду вместе с $u[\cdot]$, $v[\cdot]$ удовлетворяет (1). Оптимальный гарантированный результат (ОГР) управления определяется равенством:

$$\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) = \inf_{U,\Delta} \sup \Big\{\gamma \mid \big\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\big\} \in S\big(t, x[t_*[\cdot]t], U, \Delta\big)\Big\}. \tag{5}$$

Величина (5) задает функционал ОГР $\varphi: \big\{t \in [t_*,T],\ x[t_*[\cdot]t] \in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)\big\} \mapsto \mathbb{R}$.

Пусть $\psi: \big\{t \in [t_*,T],\ x[t_*[\cdot]t] \in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)\big\} \mapsto \mathbb{R}$, F — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, $[F]^\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность F в $\mathbb{R}^n$. Введем понятие нижней $\mathrm{d}^-\big\{\psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big|F\big\}$ и верхней $\mathrm{d}^+\big\{\psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big|F\big\}$ производных функционала ψ по многозначному направлению F, [3]:

$$\mathrm{d}^\mp\big\{\psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big|F\big\} = \pm \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{y[\cdot]\in\Omega_\varepsilon} \liminf_{\delta\downarrow 0} \pm\Big[\psi\big(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]\big) - \psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\Big]\,\delta^{-1}.$$

Здесь Ω_ε — множество удовлетворяющих (2) функций $y[\cdot] \in C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big)$, которые на $[t,T]$ абсолютно непрерывны и почти всюду удовлетворяют включению $\mathrm{d}y[\tau]/\mathrm{d}\tau \in [F]^\varepsilon$.

Т е о р е м а 1. *При условиях* (C1)–(C4) *функционал ОГР* φ *является единственным непрерывным функционалом, который удовлетворяет паре дифференциальных неравенств*

$$\pm\Big[\mathrm{d}^\mp\big\{\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) - \big\langle s, x[t]\big\rangle \,\big|\, B\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big\} + H\big(t, x[t_*[\cdot]t], s\big)\Big] \leqslant 0$$

при всех $t \in [t_*,T)$, $x[t_*[\cdot]t] \in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)$, $s \in \mathbb{R}^n$ *и условию на правом конце*

$$\varphi\big(T, x[t_*[\cdot]T]\big) = \sigma\big(x[\cdot]\big),\ x[t_*[\cdot]T] = x[\cdot] \in C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big).$$

Здесь

$$B\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) = \big\{f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \leqslant L\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big\}.$$

Доказательство теоремы 1 опирается на результаты работ [2, 3] по исследованию минимаксных [4] решений функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби в ci-производных и их приложению к решению задач управления с наследственной информацией.

Список литературы

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Лукоянов Н. Ю. Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикл. матем. и механика. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 629–643.
3. Lukoyanov N. Yu. Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. Vol. 8, № 3. P. 365–397.
4. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва;Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2003.

Лукоянов Николай Юрьевич

Институт математики и механики УрО РАН,

Россия, Екатеринбург

e-mail: nyul@imm.uran.ru