УДК 517.97

© С. В. Лутманов

КОМПРОМИССНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

Рассматривается линейная конфликтно-управляемая динамическая система, математической моделью которой служит позиционная дифференциальная игра нескольких лиц. В качестве принципа рационального поведения игроков в игре предлагается принцип компромисса. Смысл его состоит в том, что для заданных значений компромиссных оценок строится набор стратегий всех игроков, который обеспечивает результат игры для каждого игрока не «хуже» его верхней компромиссной оценки, а любому «игроку-уклонисту» не позволяет получить значение платы «лучше» его нижней компромиссной оценки. Указанный принцип компромисса является в некотором смысле обобщением принципа равновесия Нэша. Данная работа является продолжением цикла статей [1],[2]. Для игры в нормальной форме $\Gamma = \{K, \{U_i\}_{i\in K}, \{I_i\}_{i\in K}\}$ введем понятие компромиссного набора стратегий.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть

$$S_* = (S_{1*}, \dots, S_{k*}),\ S^* = (S_1^*, \dots, S_k^*),\ S_{i*} \leqslant S_i^*,\ i \in K.$$

Ситуация $\hat{W} = (\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_k) \in \prod_{i\in K} U_i$ называется компромиссной относительно векторов $S_*, S^* \in R^k$, если для всех $i \in K$ выполняются неравенства

$$S_{i*} \leqslant \min_{U_i} I_i(\hat{U}_1, \dots, U_i, \dots, \hat{U}_k) \leqslant I_i(\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_i, \dots, \hat{U}_k) \leqslant S_i^*.$$

Построение компромиссного управления в классе позиционных стратегий осуществим для дифференциальной игры следующего вида. Динамика игры описывается обыкновенным векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\sum_{i=1}^{k} u_i.$$

Здесь $t \in R^1$ — текущее время, $x \in R^n$ — фазовый вектор, u_i — вектор управляющих параметров i-го игрока, $i \in K$. На векторы управляющих параметров игроков наложены геометрические ограничения в форме включений $u_i \in P_i$, где $P_i \subset R^n, i \in K$ выпуклые и компактные множества. Момент T окончания игры фиксирован, а функция платы игрока имеет вид

$$I_i(U_1, \dots, U_k) = \varphi_i(x(T)),$$

где функции $\varphi_i : R^n \to R^1$ являются достаточно гладкими. Дополнительно предполагается, что для любого вектора $s \in R^n$ и всех номеров $i \in K$ справедливо неравенство

$$\min_{u_1\in P_1} < s, u_1 > + \dots + \min_{u_i\in P_i} < s, u_i > + \dots + \min_{u_k\in P_k} < s, u_k > \leqslant 0.$$

Пусть $M \subset R^n$ — выпуклое и компактное множество. Полагаем

$$S_i = \max_{x\in M} \varphi_i(x),\ s_i = \min_{x\in M} \varphi_i(x),\ i \in K, \tag{1}$$

$$\varepsilon(t,x) = \max\{0, -\max_{|l|=1}(< p, l > + < X(T,t)x, l >)\}, \tag{2}$$

$$W = \{(t,x) | \varepsilon(t,x) \leqslant 0,\ t \leqslant T\},\ W_\varepsilon = \{(t,x) | \varepsilon(t,x) > 0,\ t \leqslant T\}.$$

Здесь $X(t,T)$ — фундаментальная матрица Коши для однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 1. *Для всех* $(t,x) \in W_\varepsilon$ *максимум в* (2) *достигается на единственном векторе* $l^0(t,x)$.

Л е м м а 2. *Функция* ε *является непрерывно дифференцируемой функцией в области* W_ε, *и ее частные производные вычисляются по формулам*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(t,x) = X(T,t)l^0(t,x) = s(t,x),\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(t,x) = - < X(T,t)A(t)x, l^0(t,x) > .$$

Набор стратегий $U_1, \ldots, U_k$ определим следующим образом

$$U_i = \begin{cases} u_i^e(t,x), & (t,x) \in W_\varepsilon, \\ \text{произвольный вектор из } P_i, & (t,x) \notin W_\varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

где вектор $u_i^e(t,x)$ удовлетворяет условию

$$< s(t,x), B(t)u_i^e(t,x) >= \min_{u_i \in P_i} < s(t,x), B(t)u_i >, i \in K, (t,x) \in W_\varepsilon.$$

Т е о р е м а 1. *Набор стратегий* (3) *является компромиссным относительно оценок* (1) *для любой начальной позиции из множества* W.

В качестве модельного примера в работе исследована дифференциальная игра трех лиц $T = 1, u, v, w \in S(0,1) = \{z \in R^2, |z| \leqslant 1\}$,

$$\dot{x}_1 = (\cos t)x_1 + tx_2 + u_1 + v_1 + w_1,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{t+1}x_1 + (\sin t)x_2 + u_2 + v_2 + w_2,$$
$$\varphi_1(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + (x_2-2)^2},\ \varphi_2(x_1,x_2) = \sqrt{(x_1+x_2)^2 + (x_2-\sqrt{3})^2},$$
$$\varphi_3(x_1,x_2) = \sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2 + (x_2-1)^2}.$$

Построены компромиссные оценки игроков и компромиссный, относительно этих оценок, набор позиционных стратегий.

Список литературы

1. Лутманов С. В. Компромиссное позиционное управление в нелинейных дифференциальных играх нескольких лиц// Проблемы механики и управления. Пермь. Изд-во Пермского ун-та. 2005. С. 35- 52
2. Лутманов С. В. Компромиссное управление в дифференциальных играх нескольких лиц// Известия Института математики и информатики. Ижевск. Изд-во Удмуртс. ун-та. 2005. №2(32). С. 83-102.

Лутманов Сергей Викторович
Пермский государственный университет,
Россия, Пермь
e-mail: mpu@psu.ru