УДК 517.977

© **В. И. Максимов, Н. А. Федина**

ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБРАЩЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Обсуждаются задачи динамического восстановления неизвестных характеристик систем с последействием [1, 2]. Приведем одну из них. Рассматривается система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\nu)) + Bu(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^N$, B — $N \times n$ -мерная матрица, f — $N \times N$ -мерная матричная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Траектория системы $x(t)$ зависит от меняющегося во времени входного воздействия $u(t)$. Заранее как это воздействие, так и траектория не заданы. Известно лишь, что $u(t)$ есть функция, суммируемая с квадратом нормы, то есть

$$u(\cdot) \in L_2([0,T]; R^n).$$

В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in [0,T]$ наблюдаются вектора $x(\tau_i)$. Результаты измерений — вектора $\xi_i^h \in R^N$ — удовлетворяют неравенствам

$$\xi_i^h = x(\tau_i) + z_i, \quad |z_i| \leqslant h.$$

Здесь величина h характеризует точность измерения. Требуется построить алгоритм приближенного восстановления входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Таким образом, необходимо сконструировать алгоритм приближенного восстановления входа — вычисления некоторого управления $v^h(\cdot)$ такого, что $v^h(\cdot)$ играет роль своего рода «оценки», приближения $u(\cdot)$.

Сформулированная выше задача относится к классу обратных задач динамики. Укажем алгоритм ее решения. Возьмем некоторое семейство разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = T, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h)$$

отрезка $[0,T]$ с шагом $\delta(h)$ и функцию $\alpha(h)$ (последняя играет роль параметра «локальной» регуляризации в функционале типа тихоновского). Функции $\delta(h) \in (0,1)$ и $\alpha(h) \in (0,1)$ выберем таким образом, чтобы были выполнены следующие условия

$$\delta(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0, \quad (h + \delta(h))/\alpha(h) \to 0, \tag{2}$$

$$\delta(h)/\alpha^2(h) \leqslant 1, \quad h/\delta(h) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06-01-00359), Программы поддержки ведущих научных школ России НШ 7581.2006.1 и Урало-Сибирского интердисциплинарного проекта.

Затем введем вспомогательную управляемую систему (модель)

$$\dot{w}(t) = f(\xi_i^h, \xi_{i-k_h}^h) + Bv^h(t) + \nu^h(t), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \tag{3}$$

с начальным условием $w(0) = \xi_0^h$. Для простоты ниже полагаем $k_h = \delta/m_h$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^m$, $m = m_h$. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляются вектора v_i^h и ν_i^h по формулам

$$v_i^h = \frac{1}{\alpha} B'(\xi_i^h - w(\tau_i)), \quad \nu_i^h = \frac{c\delta}{\alpha^2}(\xi_i^h - w(\tau_i)).$$

Здесь и ниже $c = \text{const} > 0$, штрих означает транспонирование. Затем на вход модели подаются управления

$$v^h(t) = v_i^h \quad \text{и} \quad \nu^h(t) = \nu_i^h, \quad t \in \delta_i.$$

Под действием этих двух управлений, модель (3) переводится из состояния $w(\tau_i)$ в состояние $w(\tau_{i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия согласования параметров алгоритма* (2). *Тогда имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \textit{в} \quad L_2([0,T]; R^n) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Здесь $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ — единственный элемент множества $U(x(\cdot))$ — минимальной $L_2([0,T]; R^n)$-нормы, $U(x(\cdot))$ — множество всех управлений $u(\cdot) \in L_2([0,T]; R^n)$, совместимых с выходом $x(\cdot)$.

Пусть в уравнении (1) $B = I$ (единичная матрица), то есть $n = N$.

Л е м м а 1. *Пусть функция $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ является функцией ограниченной вариации. Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма*

$$\int_0^T |v^h(\tau) - u_*(\tau)|_n^2 \, d\tau \leqslant c_1 \alpha^{-1}(h + \delta) + c_2(h + \alpha + \delta)^{1/2}.$$

Список литературы

1. Osipov Ju. S., Kryazhimskii A. V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, London, 1995.
2. Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И. Обратные задачи динамики для параболических систем. Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.

Максимов Вячеслав Иванович
Институт математики и механики
Уральского отделения РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Федина Нина Александровна
Нижнетагильский технологический
институт УГТУ — УПИ
Россия, Нижний Тагил