УДК 517.9

© М. Ш. Маматов

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И УБЕГАНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ, ЗАДАННЫМ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение

Задачам преследования и убегания для различных классов дискретных игр посвящены многочисленные исследования [1,2,3]. Общие вопросы теории дискретных игр рассмотрены в [1], задачи преследования и убегания для линейных игр изучены в [2], задача убегания для нелинейных игр — в [3]. В этих работах движение точек описывается разностными уравнениями первого порядка. Цель настоящей работы — изучение игровых задач с разностными уравнениями второго порядка вида (1). Получены достаточные условия для возможности завершения преследования и убегания в игре (1). При этом для решения этой задачи применяются полиномы Чебышева второго рода.

§ 1. Постановка задачи

Пусть движение точки z m-мерного евклидовая пространства R^m описывается дискретными уравнениями

$$z(n-1) - Cz(n) + z(n+1) = f(n, u(n), v(n)), \quad n = 1, 2, \dots; \tag{1}$$

где n — номер шага; C — $m \times m$ постоянная квадратная матрица; u, v — управляющие параметры, u — параметр преследования, v — параметр убегания, $u(n) \in P(n) \subset R^p$, $v(n) \in Q(n) \subset R^q$, $P(n)$ и $Q(n)$ — непустые множества; параметр u выбирается в виде последовательности $u = u(\cdot) = (u(1), u(2), \dots, u(n), \dots)$, $u(n) \in P(n)$, $n = 1, 2, \dots$; параметр v — в виде последовательности $v = v(\cdot) = (v(1), v(2), \dots, v(n), \dots)$, $v(n) \in Q(n)$, $n = 1, 2, \dots$; f — заданная функция, отображающая $N \times R^p \times R^q$ в R^m. Кроме того, в R^m выделено терминальное множество M.

Цель преследующего игрока вывести $z(n)$ на множество M, убегающий игрок стремится этому помещать.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что *в игре* (1) *из начального положения* (z_0, z_1) *возможно завершение преследования за* $N(z_0, z_1)$ *шагов*, если по любой последовательности $\bar{v}(\cdot)$ можно построить такую последовательность $\bar{u}(\cdot)$, что решение $z(\cdot) = (z(0), z(1), \dots, z(n), \dots)$ уравнения

$$z(n-1) - Cz(n) + z(n+1) = f(n, \bar{u}(n), \bar{v}(n)), \quad z(0) = z_0, \ z(1) = z_1$$

удовлетворяет условию $z(\bar{n}) \in M$, где $1 \leqslant \bar{n} \leqslant N(z_0, z_1)$. При этом для нахождения значения $u(n)$ параметра u на n-м шаге, $n \geqslant 1$, разрешается использовать $z(n)$ и $v(n)$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что *в игре* (1) *из начального положения* (z_0, z_1), $z_0, z_1 \notin M$ *возможно уклонение от встречи с множеством* M, если для любой последовательности $\bar{u}(\cdot)$ можно построить такую последовательность $\bar{v}(\cdot)$, что решение $\bar{z}(n)$, $n = 1, 2, \dots$ уравнения

$$z(n-1) - Cz(n) + z(n+1) = f(n, \bar{u}(n), \bar{v}(n)), \quad z(0) = z_0, \ z(1) = z_1$$

ни на каком шаге не попадает на $M : \bar{z}(n) \notin M$ для всех $n = 1, 2, \dots$. При этом для нахождение значения $\bar{v}(n)$ параметра v на n-м шаге разрешается использовать значения $z(n)$ и $u(n)$. В случае, когда возможно уклонение от встречи из любого начального положения (z_0, z_1), будем говорить, что *в игре* (1) *возможно убегание.*

§ 2. Задача преследования

Пусть дискретная игра описывается уравнениями (1). Через $U_n(x)$ обозначим полином Чебышева второго рода степени n:

$$U_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{\sin(\arccos x)}, & |x| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\Big(\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)^{n+1} - \big(x+\sqrt{x^2-1}\big)^{-(n+1)}\Big), & |x| > 1 \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда легко можно получить следующее: $U_{-2}(x) = -1, U_{-1}(x) = 0, U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$ и так далее. Имеются следующие рекуррентные соотношения для $U_n(x)$:

$$U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x),\ n \geqslant 0,\ U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x. \tag{3}$$

Далее через $U_n(x)$ обозначим матричный полином Чебышева от матрицы , определяемой по рекуррентным формулам (3). Отсюда видно, что $U_{-2}(X) = E, U_{-1}(X) = \bar{0}, U_0(X) = E$, $U_1(X) = 2X$, где E — единичная, а $\bar{0}$ — нулевая матрица.

Л е м м а 1. *Пусть* $\bar{u} = \bar{u}(n), \bar{v} = \bar{v}(n), 1 \leqslant n \leqslant N$ *— заданные конкретные управления. Тогда решения уравнения* (1) *с начальными условиями* $z(0) = z_0$, $z(1) = z_1$ *определяются формулой*

$$z(n) = U_{n-2}\Big(\frac{1}{2}C\Big)z_0 - U_{n-1}\Big(\frac{1}{2}C\Big)z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} U_{n-k-1}\Big(\frac{1}{2}C\Big)f(k, \bar{u}(k), \bar{v}(k)).$$

П р е д п о л о ж е н и е 1. $M = M_0 + M_1$, где M — линейное подпространство R^m; M_1 — подмножество подпространства L — ортогонального дополнения M_0 в R^m.

Через π обозначим операцию ортогональную проектирования из R^m на L. Пусть

$$W(n) = \sum_{k=1}^{n} \bigcap_{v(k)\in Q(k)} \pi\, U_{n-k-1}\Big(\frac{1}{2}C\Big)f(k, P(k), v(k)) - M_1,$$

здесь $U_{n-k-1}\Big(\dfrac{1}{2}C\Big)$ — матричный полином Чебышева.

П р е д п о л о ж е н и е 2. Пусть существует такое $n = n_0$, что

$$-\pi\Big[U_{n_0-2}\Big(\frac{1}{2}C\Big)z_0 - U_{n_0-1}\Big(\frac{1}{2}C\Big)z_1\Big] \in W(n_0).$$

Т е о р е м а 1. *Если выполнены предположения 1, 2, то в игре* (1) *из начального положения* (z_0, z_1) *возможно завершение преследования за* $N(z_0, z_1) \leqslant n_0$ *шагов.*

Список литературы

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967. 500с.
2. Сатимов Н. Ю., Маматов М. Ш. Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих // Дифференциальные уравнения. 1990. Том 26. № 9. С. 1541-1551.
3. Сатимов Н. Ю., Азамов А. Нелинейные дискретные игры убегания // Кибернетика. 1976. № 4. С. 70-74.

Маматов Машраб Шахобитдинович
Национальный университет Узбекистана,
Узбекистан, Ташкент
e-mail: narmanov@yandex.ru