УДК 517.934

© **Ю. В. Мастерков**

О ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Исследуются условия локальной управляемости в нуль системы

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times [-1,1] \tag{1}$$

в случае, когда система линейного приближения для системы (1) не является вполне управляемой. Выделен класс систем вида (1), для которых имеет место локальная управляемость.

Предполагается, что функции $f_1(x), f_2(x)$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат и, кроме того, $f_0(0) = 0$, $f_1(0) = b \neq 0$.

Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется τ-управляемой, если существует измеримое управление $u(t)$, $t \in [0,\tau]$, такое, что разрешима краевая задача

$$\dot{x} = f_0(x) + u(t)f_1(x), \quad x(0) = x_0, \quad x(\tau) = 0. \tag{2}$$

Множество всех τ-управляемых точек называется *множеством управляемости* системы (1) *за время* τ и обозначается D_τ. Множество $D_\infty = \cup_{\tau>0} D_\tau$ называется *множеством управляемости* системы (1).

Система (1) называется *локально управляемой*, если $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при некотором $\tau > 0$.

Система (1) называется N*-управляемой*, если $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при любых $\tau > 0$.

Система (1) называется *локально управляемой в малом*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого $x_0 : |x_0| < \delta$ найдутся время $\tau > 0$ и управление $u_{x_0} : [0,\tau] \to [-1,1]$, обеспечивающие существование решения $x(t)$, $t \in [0,\tau]$ краевой задачи (2), причем $|x(t)| < \varepsilon$, при всех $t \in [0,\tau]$.

Наряду с системой (1) рассмотрим, соответствующую ей, систему первого приближения:

$$\dot{x} = Ax + ub, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times [-1,1] \tag{3}$$

где $A = \Big(\dfrac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big)_{x=0}$.

Известно [1], что локальная управляемость системы (3) равносильна условию:

$$\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = n. \tag{4}$$

Отметим [2], что условие (4) является достаточным для N-управляемости системы (1).

Введем в рассмотрение функцию $s(x) \doteq \det[f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)]$, где

$$f_i(x) = [f_0(x), f_{i-1}(x)] \doteq \Big(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\Big) f_{i-1}(x) - \Big(\frac{\partial f_{i-1}(x)}{\partial x}\Big) f_0(x), \quad i = 2, 3 \ldots n-1.$$

Отметим, что $s(x), f_i(x)$ — голоморфные функции и $f_i(0) = A^{i-1}b$ при $i = 0, 1 \ldots n-1$.

Рассмотрим управления $u_+ \equiv 1$ и $u_- \equiv -1$. Через $x_+(t)$ и $x_-(t)$ обозначим соответствующие им решения системы (1), с начальным условием $x_+(0) = x_-(0) = 0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b \ldots A^{n-1}b) \geqslant n-1$ *и* $\operatorname{grad} s(x)|_{x=0} \neq 0$. *Если система* (1) *управляема в малом, то существует такое* $\tau > 0$, *что* $s(x_+(t))s(x_-(t)) < 0$ *для всех* $t \in (0,\tau)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathrm{rank}(b, Ab, \dots A^{n-1}b) \geqslant n-1$. *Если существуют время* $\tau > 0$ *и измеримые управления* $u_1(t), u_2(t)$, $t \in [0, \tau]$ *такие, что для соответствующих им решений системы* (1) $x_1(t) = x(t, u_1(\cdot))$, $x_2(t) = x(t, u_2(\cdot))$ *выполнено условие*

$$s(x_1(t))s(x_2(t)) < 0 \quad \text{при всех} \quad t \in (0, \tau), \tag{5}$$

то система (1) N *-управляема.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $\mathrm{rank}(b, Ab, A^2b \dots A^{n-1}b) \geqslant n-1$. *Если существует* $\tau > 0$, *такое, что* $s(x_+(t))s(x_-(t)) < 0$ *для всех* $t \in (0, \tau)$, *то система* (1) N *-управляема.*

Отметим [2], что для $n{=}2$ условие (5) является и необходимым для N-управляемости системы (1).

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\mathrm{grad}\, s(x)|_{x=0} \neq 0$. *Если существуют время* $\tau > 0$ *и измеримые управления* $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [0, \tau]$ *такие, что для соответствующих им решений системы* (1) $x_1(t) = x(t, u_1(\cdot))$, $x_2(t) = x(t, u_2(\cdot))$ *выполнено условие* (5), *то система* (1) *управляема в малом.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $\mathrm{grad}\, s(x)|_{x=0} \neq 0$. *Если существует такое* $\tau > 0$, *что для всех* $t \in (0, \tau)$ *выполнено условие:* $s(x_+(t))s(x_-(t)) < 0$, *то система* (1) *управляема в малом.*

Список литературы

1. Ли Э.М., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
2. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т 4. № 7. С. 606–617.

Мастерков Юрий Викторович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: imi@uni.udm.ru