

УДК 517.977.5

© А. Р. Матвийчук

**К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
С ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ<sup>1</sup>****Введение**

В работе рассматривается метод численного решения задачи об оптимальном по быстродействию управлении подвижным протяженным объектом на плоскости при наличии фазовых ограничений. Данный метод является дальнейшим развитием идей, изложенных в [1–5]. В настоящее время актуальность изучения управляемых систем, стесненных фазовыми ограничениями, обусловлена с одной стороны многочисленными задачами из различных областей механики, экономики, экологии и биологии, с другой стороны — внутренними потребностями, возникающими в математической теории управления динамическими системами. В частности, предложенный в работе метод решения задачи может быть использован при решении задач робототехники (навигация в средах с подвижными препятствиями).

**§ 1. Постановка задачи**

В рассматриваемой задаче имеется неподвижная арена  $G$ , внутри которой располагаются подвижные многоугольники-препятствия  $\mathcal{Y}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{Y}}$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , совершающие плоскопараллельные движения по известным нам программным законам. Препятствия задают фазовое ограничение, имеющее непустые сечения  $\Phi(t) = G \setminus (\bigcup_{i=1}^{N_{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}_i(t)) \subset R^2$ .

Кроме того, внутри арены имеется некоторый подвижный многоугольник  $\mathcal{Y}^*$ , который можно перемещать в плоскости путем плоско-параллельного переноса. В начальный момент времени «центр» многоугольника  $\mathcal{Y}^*$  совпадает с некоторой точкой  $O$ . «Центром» многоугольника  $\mathcal{Y}^*$  назовем произвольно выбранную точку  $O$ , лежащую внутри этого многоугольника и жестко связанную с ним. Положение «центра»  $O$  на плоскости  $R^2$  переменных  $x_1, x_2$ , представляется как точка  $x \in R^2$ . Так как подвижный многоугольник можно перемещать только путем параллельного переноса, то точка  $x$  полностью определяет положение многоугольника  $\mathcal{Y}^*$  на плоскости  $R^2$ . Тогда и движение точки  $x$  полностью определяет движение многоугольника  $\mathcal{Y}^*$ .

Динамика подвижного многоугольника описывается системой вида

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x) \cdot u, \quad (1)$$

где  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $u = (u_1, u_2)^T$  — управление такое, что  $u \in P$ ,  $P$  — выпуклый многоугольник в  $R^2$ ,  $f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix}$  и  $B(t, x) = \begin{bmatrix} b_{11}(t, x) & b_{12}(t, x) \\ b_{21}(t, x) & b_{22}(t, x) \end{bmatrix}$ .

На управляемую систему (1) накладываются традиционные условия, обеспечивающие существование, единственность и продолжимость решений системы на весь промежуток  $[t_0, \vartheta]$ .

Внутри арены  $G$  расположены стартовое множество  $X_*$  и целевое множество  $X_f(t)$ , которые заданы в виде произвольных многоугольников. Полагаем, что  $X_f(t)$ , как и препятствия, перемещается внутри арены по известному нам программному закону.

**З а д а ч а.** Требуется построить допустимое управление  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , приводящее фазовый вектор  $x[t]$  системы (1) из стартового множества  $X_*$  на  $\varepsilon^*$ -окрестность целевого множества  $X_f(t)$  за минимальное время. Здесь  $\varepsilon^*$  — заданное положительное число.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, проектами № 05-01-00601 и № 04-01-96099-р2004урал\_а, гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-8512.2006.1 и программы научного сотрудничества с СО РАН.

## § 2. Метод решения

Для решения представленной задачи предлагается перейти к рассмотрению подвижного «центра»  $O$  путем построения так называемых «запретных зон» и последующего применения трехэтапного метода построения решения. Этот метод базируется на дискретизации промежутка  $[t_0, \vartheta]$ , то есть задании разбиения  $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_N = \vartheta\}$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ .

В представленном методе на 1-м этапе для моментов разбиения  $\Gamma$  вычисляется последовательность множеств достижимости  $\{\tilde{X}^{(n)}(t_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, N_f$ , (в прямом времени) до момента встречи очередного множества достижимости с терминальным множеством. При этом выделяется точка из пересечения этих множеств. На 2-м этапе, отправляясь от выделенной точки  $y[t_{N_f}]$ , протягивается (в обратном времени) через множества достижимости движение поводья  $y[t]$ , которое в результате приходит в некоторую точку начального множества (см. рис. 1). На 3-м этапе строится (в прямом времени) управление  $u(t)$ , и, соответственно, движение управляемой системы  $x[t]$ , приходящее в заданную окрестность терминального множества.

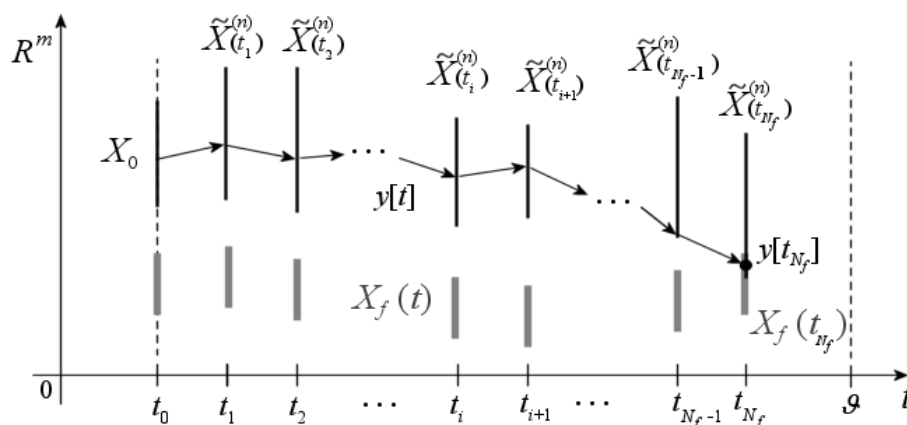


Рис. 1: Множества  $\{\tilde{X}^{(n)}(t_i)\}$  и поводья  $y[t]$

Важно отметить, что в представленной работе, в отличие от широко распространенных сеточных методов, все множества и, в том числе, множества достижимости  $\tilde{X}^{(n)}(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, N_f$ , представлены в виде многоугольников, что влечет применение более сложных процедур построения множеств достижимости, нежели в случае сеточных методов. В то же время, использование многоугольников приводит во многих случаях к заметному сокращению времени вычисления множеств достижимости на ЭВМ и существенному уменьшению объема памяти, требуемого для таких расчетов.

### Список литературы

1. Красовский Н. Н. Управление динамической системой // М.: Наука, 1985, 520 с.
2. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Матвийчук А. Р. Задача об оптимальном по быстродействию управлении подвижным объектом на плоскости при наличии фазовых ограничений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 1. С. 89–95
5. Незнахин А. А., Ушаков В. Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2001. Т. 41, № 6. С. 895–908.

Матвийчук Александр Ростиславович  
Институт математики и механики УрО РАН,  
Россия, Екатеринбург  
e-mail: matv@imm.uran.ru