

УДК 534.1

© В. С. Метрикин

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений (ДУ) с переменной структурой, описывающая автоколебания осциллятора, который парой сухого трения связан с основанием, движущимся с постоянной скоростью. Предполагается, что коэффициент трения относительного покоя f является кусочно-непрерывной функцией продолжительности t_k предшествующего интервала длительного контакта тела с основанием. Дается классификация простейших периодических и установившихся стохастических решений рассматриваемого ДУ и построены области их существования в пространстве параметров. Подробно анализируются области в пространстве параметров, внутри которых существует периодические решения ДУ произвольной сложности. В частности, в явном виде строятся уравнения так называемых недостижимых границ, в малой окрестности которых существует счетное множество различных периодических решений.

ДУ движения рассматриваемой существенно нелинейной системы внутри интервала проскальзывания и длительного контакта имеют вид

$$m\ddot{X} + CX + f_*P\text{sign}(X - V) = 0, \quad \dot{X} \neq V,$$

$$\dot{X} = V, \quad C|X| \leq fP,$$

где m — масса, P — вес тела, C — коэффициент жесткости пружины. Коэффициент трения относительного покоя f равен

$$f = f_* + (f^* - f_*)t_k/t^*, \quad 0 < t_k < t^*,$$

$$f = f^*, \quad t_k > t^*.$$

У т в е р ж д е н и е 1. Исследование свойств решений рассматриваемой системы ДУ возможно изучить с помощью точечного отображения

$$\Psi(\eta_{k+1}) = \varphi(\eta_k),$$

где

$$\Psi(\eta) = \lambda\eta - \varepsilon(\eta),$$

$$\varphi(\eta) = 1 - (-1)^j(\varepsilon(\eta) - 2j + 1),$$

$$2(j - 1) < \varepsilon(\eta) < 2j \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\varepsilon(\eta) = \eta, \quad 0 < \eta < \varepsilon_*,$$

$$\varepsilon(\eta) = \varepsilon_*, \quad \eta > \varepsilon_*,$$

$$\lambda = \frac{V\sqrt{mc}}{Pf_*}, \quad \varepsilon_* = \frac{f^*}{f_*} - 1, \quad \eta_k = t_k \frac{\varepsilon_*}{t^*}.$$

Величина j равна числу интервалов проскальзывания при $t_k < t < t_{k+1}$.

У т в е р ж д е н и е 2. При $\lambda > 2$ всегда существует одна устойчивая неподвижная точка $\eta_0^ = 0$ отображения, соответствующая гармоническим колебаниям тела без зон длительного контакта.*

У т в е р ж д е н и е 3. Простые устойчивые неподвижные точки η_i^ существуют только в области пространства параметров $\eta_i^* > \varepsilon_*$ и определяются из соотношения*

$$\eta_i^* = \lambda^{-1}(1 + \varepsilon_* - (-1)^i(\varepsilon_* - 2i + 1))$$

и им соответствуют $i/2$ -оборотные решения системы ДУ с величиной длительного контакта η_i^ .*

У т в е р ж д е н и е 4. Простые неподвижные точки η_k^{**} , принадлежащие интервалам $0 < \eta_k^{**} < \varepsilon_*$, неустойчивые и определяются через параметры системы в виде

$$\eta_k^{**} = (1 + (-1)^{k+1}(1 - 2k))/(\lambda - 1 + (-1)^k) \\ (k = 2, 3, \dots).$$

У т в е р ж д е н и е 5. Если $2 < \varepsilon_* < 4$ ($j = 2$), то при $0 < \lambda < 4/\varepsilon_*$ существует устойчивая 1 - оборотная периодическая траектория системы со временем η_2^* длительного контакта, при $4/\varepsilon_* < \lambda < (2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_*$ существуют устойчивые циклы n - кратных точек преобразования T^n , при $(2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_* < \lambda < 2$ реализуется 1 - оборотные стохастические траектории системы.

У т в е р ж д е н и е 6. Если $4 < \varepsilon_* < 6$ ($j = 3$), то при $0 < \lambda < 2 - 4/\varepsilon_*$ существует $3/2$ - оборотные устойчивые периодические траектории со временем η_3^* длительного контакта, при $2 - 4/\varepsilon_* < \lambda < (2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_*$ наблюдаются циклы кратных точек преобразования T^n и, наконец, при $(2 + \varepsilon_*)/\varepsilon_* < \lambda < 2$ реализуется 1 - оборотный стохастический режим с длительными контактами.

У т в е р ж д е н и е 7. Устойчивые периодические $j/2$ - оборотные решения системы ДУ со временем η_j^* длительного контакта реализуются в областях пространства параметров $G_{j/2}^p(2(j-1) < \varepsilon_* < 2j; 0 < \lambda < 2j/\varepsilon_*$ при четных j и $0 < \lambda < 2 - 2(j-1)/\varepsilon_*$ при нечетных j).

У т в е р ж д е н и е 8. Циклы кратных точек существуют в областях G_j^k на плоскости параметров λ, ε_* , границы которых задаются соотношениями

$$\lambda_s = 1 + 2/\varepsilon_* \quad \lambda_- = 2j/\varepsilon_*, \quad j = 2, 4, 6, \dots, \\ \lambda_- = 2 - 2(j-1)/\varepsilon_*, \quad j = 3, 5, 7, \dots$$

У т в е р ж д е н и е 9. $j/2$ - оборотные стохастические траектории реализуются в областях $G_{j/2}^s$ между границами

$$\lambda = 1 + 2/\varepsilon_*, \\ \lambda = 1 + 1/(j-1), \quad (j = 2, 4, 6, \dots).$$

У т в е р ж д е н и е 10. Удвоение кратности периода периодических траекторий системы происходит при переходе через границы Γ_o^n , уравнения которых имеют вид

$$\varepsilon_*^n = \frac{4}{1 + a^{2^n}} \sum_{p=0}^s a^{(2^{2p}-1)} \prod_{k=2p+1}^{n-1} (1 - a^{2^k}),$$

где $s = n/2$ при четных n , $s = (n-1)/2$ при нечетных n , а ε_*^n определяет 2^n - и 2^{n+1} - кратные периодические решения системы ДУ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $a = \lambda - 1$.

Метрикин Владимир Семенович
 Научно-исследовательский институт прикладной
 математики и кибернетики нижегородского
 государственного ун-та им. Н. И. Лобачевского,
 Россия, Нижний Новгород
 e-mail: pmk@unn.ac.ru