УДК 517.9

© **А. Я. Нарманов**

О СТАБИЛЬНОСТИ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Пусть M — гладкое многообразие размерности n класса $C^{r+1}, r > 1$, D — система векторных полей класса C^r, заданных на M. Для векторного поля $X \in D$ и точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Область определения $\Omega(x, X)$ отображения $t \to X^t(x)$ зависит от x и X. В дальнейшем всюду в записях вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in \Omega(x, X)$. Орбита систеы D, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, ..., t_k$ векторные поля $X_1, X_2, ..., X_k$ из D такие, что $y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(...(X_1^{t_1}(x))...))$.

Ясно, что, если D состоит из одного векторного поля, то орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием). В случае, когда D состоит из более чем одного векторного поля, как следует из работ [1,2], каждая орбита является гладким многообразием класса C^r, гладко погруженным в M. Изучение предельных множеств орбит тесно связано с вопросом о непрерывности многозначного отображения $x \to L(x)$, которое каждой точке $x \in M$ ставит в соответсвие орбиту $L(x)$, проходящую через точку x. Достаточные условия непрерывности этого отображения получены в работах [3, 4, 5]. Теперь рассмотрим одну задачу из теории управления, решение которой также связано с непрерывностью отображения $x \to L(x)$.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = f(x, y),\ x \in M,\ u \in U \subset R^m \tag{1}$$

здесь U — компакт, для каждого $u \in U$ векторное поле $f(\cdot, u)$ является бесконечно дифференцируемым, а отображение $f : M \times U \to TM$ непрерывным, где TM — касательное расслоение многообразия M.

Допустимыми управлениями считаются кусочно-постоянные функции $u : [0, T] \to U$. Будем говорить, что точка $x_0 \in M$ управляема из точки η за время $T > 0$, если существует такая траектория $x : [0, T] \to M$ системы (1), что $x(0) = x_0$, $X(T) = \eta$.

Множество всех точек M, которые управляемы из точки η, называется множеством управляемости с целевой точкой η и обозначается через G_η. Считаем, что $\eta \in G_\eta$ для всех $\eta \in M$. Известно, что множество всех бесконечно дифференцируемых векторных полей на M является алгеброй Ли,в которой прозведением векторных полей X и Y служит их скобка Ли $[X, Y]$ [1]. Обозначим через D множество векторных полей $f(\cdot, u) : u \in U)$,через $A(D)$ мимнимальную подалгебру Ли,содеожащую D .Из определения орбиты вытекает,что $G_\eta \subset L(\eta)$ для всех $\eta \in M$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что система (1) вполне управляема на $L(\eta_0)$, если $G_\eta = L(\eta_0)$ для всех $\eta \in L(\eta_0)$.

Вопрос о том , что если система обладает свойством «вполне управляемости» на слое $L_0 = L(\eta)$, то при каких условиях система (1) обладает этим свойством на близких к данному слою слоях, обсуждался в работах [5]и [6]. Ниже дается одно достаточное условие для стабильности вполне управляемой системы.

Пусть $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$, $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$. В этом случае разбиение F многообразия M на орбиты D являются k мерными многообразиями [1,2]. Напомним понятие голономии слоя. Пусть $x \in M, T_x$ — трансверсальное к $L(x)$ многообразие размерности $n-k$, содержащее точку x. Если $\omega : [0, 1] \to L(x)$ — непрерывный путь с началом и концом в точке x, ему соответствует локальный диффеоморфизм g многообразия T_x определенный в некоторой окрестности точки x и такой, $g(x) = x$. Множество ростков таких локальных диффеоморфизмов образует группу. Эта группа называется группой голономии слоя L и обозначается через $H(L)$ (подробнее см. в [7]). Теперь предположим, что $x_0 \in M, L_0 = L(x_0)$ является слоем с тривиальной группой голономии, система (1) вполне управляема на L_0.

Т е о р е м а 1. *Пусть отображение $x \to L(x)$ непрерывно в точке x_0. Тогда система (1) вполне управляема на орбитах, достаточно близких к L_0.*

З а м е ч а н и е 1. Многозначное отображение $x \to L(x)$ называется полунепрерывным снизу в точке x_0, если для каждого открытого множества V, такого, что $V \cap L(x_0) \neq \varnothing$, существует окрестность B_{x_0} точки x_0 такая, что $L(x) \cap V \neq \varnothing$ для $x \in B_{x_0}$. Многозначное отображение $x \to L(x)$ называется полунепрерывным сверху в точке x_0, если для каждого открытого множества V, такого, что $L(x_0) \subset V$, существует окрестность B_{x_0} точки x_0 такая, что $L(x) \subset V$, для всех $x \in B_{x_0}$. Многозначное отображение $x \to L(x)$ непрерывно в точке x_0, если оно одновременно полунепрерывно снизу и сверху в точке x_0. В нашем случае нетрудно доказать, что отображение $x \to L(x)$ полунепрерывно снизу в каждой точке M [5].

Список литературы

1. Sussmann H. Orbits of family of vector fields and integrability of distributions// Trans. A.M.S. 1973. V. 180. P. 171-188.
2. Stefan P. Accessible sets, orbits and foliations with singularity//Proc. London Math, Society. 1974. V. 29. P. 694-713.
3. Нарманов А. Я. О зависимости множества управляемости от целевой точки// Дифференц.уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 597- 600.
4. Нарманов А. Я. О зависимости множества управляемости от целевой точки// Дифференц.уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1334-1338.
5. Нарманов А. Я. О стабильности вполне управляемых систем// Дифференц.уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1336-1344.
6. Gauthier J., Bornard G. J. An openness condition for the controllability of nonlinear systems//Control and Optimization. 1982. V. 20.№ 6. P. 708-714.
7. Тамура И. Топология слоений. 1979. М:Мир. 317с.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана,
Узбекистан, Ташкент
e-mail: narmanov@yandex.ru