УДК 517.9

© **Г. Ш. Насритдинов**

ПРОДУКТИВНОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

А. А. Петровым и его сотрудниками была рассмотрена экономическая система с учетом линейного выбытия производственной мощности: $\dot{M} = I - \mu M, 0 \leqslant \mu \leqslant 1,$ и рабочая сила изменяется по экспоненциальному закону $R^S = R_0 e^{\lambda_p t} (R^S = \lambda_p R^S),$ то есть по выпуклой кривой. Естественно, скорость изменения рабочей силы зависит не только от количества рабочей силы, но и от производственной мощности.

Рассмотрим случай, когда скорость изменения рабочей силы линейно зависит от количества рабочей силы и производственной мощности: $\dot{R} = \lambda_p R + \nu M$ где $\lambda_p > 0,$ $\nu > 0$, R — используемая рабочая сила.

Л е м м а 1. *На изоквантах неоклассической производственной функции* $F(M,R)$ *при* $\frac{dM}{dR} < -\frac{\lambda_p}{\nu}$ *справедливо неравенство* $\ddot{R} < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что справедливы следующие соотношения:

$$\ddot{R} = \lambda_p \dot{R} + \nu \dot{M} = \dot{R}\Big(\lambda_p + \nu \frac{\dot{M}}{\dot{R}}\Big) \dot{R}\Big(\lambda_p + \nu \frac{dM}{dR}\Big) < \dot{R}(\lambda_p - \nu \frac{\lambda_p}{\nu}) = 0.$$

Следовательно, $\ddot{R} < 0$.

Рассмотрим экономическую систему, описываемую соотношениями

$$\begin{cases} \dot{M} = I - \mu M, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \\ \dot{R} = \lambda_p R + \nu M, \quad \lambda_p > 0, \quad \nu > 0, \\ F(M,R) = J + C, \quad x = \dfrac{R}{M} \\ R \leqslant R^S, \\ J = bI, \quad b > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Если для рабочей силы $R(t)$ справедлива лемма, то $R(t)$ будем называть *линейно-вогнутой.* Линейность означает линейную зависимость $\dot{R}$ от R и M , а вогнутость — вогнутость функции $R(t)$.

Известно, что справедливы соотношения:

$$F(M,R) = Mf(x), \quad x = \frac{R}{M}, \quad f(x) = F(1,x);$$

$$F(M,R_*) = M = Mf(x_*), f(0) = 0, \quad f(x_*) = 1, \quad x_* = \frac{R_*}{M},$$

$$f'(x) = \frac{\partial F}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial M} = f(x) - xf'(x) > 0, \quad f'' = M\frac{\partial^2 F}{\partial^2 R} < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_*.$$

В дальнейших рассуждениях будем считать, что $f'(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_*$ без предположения ограниченности $f'(+0) = \lim\limits_{x \longrightarrow +0} f'(x).$

Для объекта (1), как и в модели Петрова, траектория экономического роста определяется начальным условием $M(0) = M_0$ и функцией $I(t), t \geqslant 0.$ Это означает, что модель (1) допускает множество траекторий роста, зависящих от степени использования рабочей силы $R^S(t)$ и распределения продукта на $J(t)$ и $C(t)$.

Изучим траектории сбалансированного (но не экспоненциального) роста. Они выделяются условиями полной занятости в $R \leqslant R^S$ и $x = \text{const}$, $x = \frac{R(t)}{M(t)}$. Отметим, что

$$\dot{M} = \frac{1}{x}\dot{R} = (\lambda_p + \frac{\nu}{x})M(t).$$

В силу первого уравнения системы (1):

$$(\lambda_p + \frac{\nu}{x})M = I - \mu M.$$

Пользуясь уравнением баланса в (1) получаем $f(x) = b(\lambda_p + \mu + \frac{\nu}{x}) + \frac{c}{M}$.

Введем обозначение $\omega = \frac{c}{M}$ - количество потребительского продукта на одного занятого в производстве. Тогда $\frac{c}{M} = x\omega(x)$. С учетом этого получаем уравнения:

$$f(x) = b(\lambda_p + \mu + \frac{\nu}{x}) + x\omega(x) \tag{2}$$

Т е о р е м а 1. *Если для объекта* (1) *справедливо неравенство*

$$b(\lambda_p + \mu) + \frac{2b\nu}{x_*} + x_* f'(x_*) < 1, \tag{3}$$

Тогда в множестве траекторий сбалансированного роста существует траектория, на которой показатель (душевое потребление) $\omega(x)$ *в* (2) *максимален.*

Условие (3) называется условием продуктивности производства для объекта (1). Для функции $(K_0 - D_0)F(M, R) = a_0 M^\alpha R^{1-\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ условие продуктивности принимает вид

$$b(\lambda_p + \mu) + 2b\nu a_0^{\frac{1}{1-\alpha}} < \alpha.$$

Список литературы

1. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996 г.
2. Фостер Р. Обновление производства: атакующие выигрывают. М.: Прогресс, 1987 г.
3. Красногщеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983 г.
4. Петров А. А. Математическое моделирования экономического развития. Серия: Математика,кибернетика. М.: Знание, 1984. №6.
5. Столерю Л. Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974 г.
6. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973 г.

Насритдинов Гаппар Насретдинович
Национальный университет Узбекистана,
Узбекистан, Ташкент
e-mail: narmanov@yandex.ru