УДК 517.917

© **О. Г. Оленчикова, Д. М. Оленчиков**

ГЛОБАЛЬНАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ДИСКРЕТНО-БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Будем использовать следующие обозначения:
$\mathcal{M}_{n\times m}$ — множество матриц размерности $n\times m$; норма вектора $\big\|(x_1,\ldots,x_n)\big\| = \max\limits_{k=1,\ldots,n}|x_k|$; согласованная с ней норма матрицы $\|A\| = \big\|(a_{ij})\big\| = \max\limits_i\sum\limits_j|a_{ij}|$.

Рассмотрим дискретно-билинейную систему запаздывающего типа

$$\dot x(t) = A(t)x(t) + B(t)\sum_{k=1}^{p}\chi(t,\tau_k,\theta_k)U_kx(\tau_k).$$

Здесь $I=[t_0,t_1]$, $t\in I$, вектор $x(t)\in\mathbb{R}^n$; $A(t)\in\mathcal{M}_{n\times n}$ и $B(t)\in\mathcal{M}_{n\times m}$ — матрицы с непрерывными элементами,

$$\chi(t,\tau_k,\theta_k) = \begin{cases}1 & \text{при } t\in[\tau_k,\theta_k);\\ 0 & \text{при } t\notin[\tau_k,\theta_k).\end{cases}$$

Управляемые параметры: p, τ_k, θ_k, $U_k\in\mathcal{M}_{m\times n}$, причем

$$\theta_0 = t_0 \leqslant \tau_1 < \theta_1 \leqslant \tau_2 < \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_p < \theta_p \leqslant t_1 = \tau_{p+1}. \tag{1}$$

О п р е д е л е н и е 1. Любая пара $U = \big(p, \{(\tau_k,\theta_k,U_k)\}_{k=1}^{p}\big)$; удовлетворяющая условию (1) называется *допустимым управлением.* При этом $|U| = \max\limits_k\|U_k\|$ называется *модулем* управления U.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases}\dot x(t) = A(t)x(t) + B(t)\sum\limits_{k=1}^{p}\chi(t,\tau_k,\theta_k)U_kx(\tau_k);\\ x(t_0) = x_0.\end{cases} \tag{2}$$

Решение задачи (2) определяется равенствами:

$$\begin{aligned}
&x(\theta_0) = x(t_0);\\
&x(t) = X(t,\theta_k)x(\theta_k), && t\in(\theta_k,\tau_{k+1}];\\
&x(t) = X(t,\tau_k)\Big(E + \int_{\tau_k}^{t} X(\tau_k,s)B(s)\,ds\,U_k\Big)x(\tau_k), && t\in(\tau_k,\theta_{k+1}].
\end{aligned}$$

Здесь $X(t,s)$ — матрица Коши системы $\dot x = A(t)x$.
Обозначим

$$X(t,V_0,U) = \big(x(t,v_1,U),\ldots,x(t,v_q,U)\big),\ V_0 = (v_1,\ldots,v_q)\in\mathcal{M}_{n\times q}.$$

Рассмотрим матрицу

$$V = (v_1,\ldots,v_n) = \Big(\int_{\tau_k}^{\theta_k} X(t_0,s)b_{j_k}(s)\,ds\Big)_{k=1}^{n},$$

отвечающую некоторой последовательности точек τ_k, θ_k.

О п р е д е л е н и е 2. Невырожденную матрицу V (вместе с соответствующей последовательностью моментов переключения управления τ_k, θ_k) будем называть *базисной.*

Полученные здесь результаты дополняют исследования работ [1], [2].

Т е о р е м а 1. *Базисная матрица существует тогда и только тогда, когда соответствующая классическая система*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{3}$$

вполне управляема.

Т е о р е м а 2 (о повороте на диагональную матрицу). *Для любой базисной матрицы* V *и всякой диагональной матрицы* $G = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_n)$ *существует допустимое управление* U *такое, что модуль* $|U|$ *удовлетворяет неравенству* $|U| \leqslant C_X \cdot \|V^{-1}\| \cdot \|G\|$ *и*

$$x(t_1, E, U) = X(t_1, t_0)(E + VGV^{-1}).$$

Здесь C_X — константа, ограничивающая матрицу Коши:

$$\|X(t,s)\| \leqslant C_X \quad \text{при всех } t, s \in I\,.$$

С л е д с т в и е 1. *Если классическая система* (3) *вполне управляема, то существует так называемое универсальное управление* U, *то есть такое управление, что* $x(t_1, x_0, U) = 0$ *для всякого* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 3 (локальный метод поворотов). *Если классическая система* (3) *вполне управляема, то найдутся такие константы* C_U, C_G, *что всякой матрице* G, *удовлетворяющей неравенству* $\|G\| \leqslant C_G$, *отвечает допустимое управление* U, $|U| \leqslant C_U \cdot \|G\|$, *обеспечивающее равенство*

$$X(t_1, E, U) = X(t_1, t_0)(E + G).$$

Т е о р е м а 4 (о почти повороте матрицы Коши). *Если соответствующая классическая система* (3) *вполне управляема, то для любой константы* C_G *и любого сколь угодно малого положительного числа* ε *найдется такая константа* C_U, *что для всякой матрицы* G, $\|G\| \leqslant C_G$, *существуют матрица* Q *и допустимое управление* U, *удовлетворяющие неравенствам* $\|Q\| \leqslant \varepsilon$, $|U| \leqslant C_U \cdot \|G\|$ *и обеспечивающие равенство*

$$X(t_1, E, U) = X(t_1, t_0)(E + G + Q).$$

Т е о р е м а 5 (о повороте на невырожденную матрицу). *Пусть система* (3) *вполне управляема на отрезках* $[t_0, t_1]$ *и* $[t_1, t_2]$. *Тогда для любых констант* C_G, $C_{(E+G)^{-1}}$ *найдется константа* C_U *такая, что всякой матрице* G, *удовлетворяющей неравенствам* $\|G\| \leqslant C_G$, $\big\|(E+G)^{-1}\big\| \leqslant C_{(E+G)^{-1}}$, *отвечает допустимое управление* U, $|U| \leqslant C_U \cdot \|G\|$, *обеспечивающее равенство*

$$X(t_2, E, U) = X(t_2, t_0)(E + G).$$

Список литературы

1. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифферен. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
2. Быкова Т. С., Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 731–734.

Оленчикова Ольга Григорьевна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: diol@idz.ru

Оленчиков Дмитрий Моисеевич
Ижевский нефтяной научный центр,
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: diol@idz.ru