УДК 517.97

© **С. О. Отакулов**

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Введение

Проблемы управления с учетом факторов неопределенности [1] и последействия приводят к необходимости исследования управляемых дифференциальных включений вида

$$\dot{x} \in F(t, x(t), x(t-h), u), \tag{1}$$

где $\dot{x} = dx/dt$, x — n-вектор состояния, u — m-вектор управления, $h > 0, F(t,x,y,u) \subset R^n$, R^n — n-мерное евклидово пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. В работах [2-4] для управляемых дифференциальных включений с запаздыванием изучены некоторые свойства совокупности траекторий, найдены необходимые и достаточные условия управляемости ансамбля траекторий линейной модели объекта управления (1). Здесь для одного класса дифференциальных включений (1) рассматривается задача оптимизации по минимаксному критерию. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности, которые позволяют, в частности, провести построение оптимального управляющего воздействия для системы с неточным параметром возмущения.

§ 1. Постановка минимаксной задачи

Пусть в (1) $F(t,x,y,u) = A(t)x + A_1(t)y + b(t,u)$, где $A(t)$, $A_1(t)$ — $n \times n$-матрицы, $b(t,u) \subset R^n$ — непустой компакт из R^n. Тогда получим следующую модель

$$\dot{x} \in A(t)x + A_1(t)x(t-h) + b(t,u),\ t \in T = [t_0, t_1],\ u \in V. \tag{2}$$

Предполагается, что: а) элементы матриц $A(t), A_1(t)$ суммируемы на T; многозначное отображение $(t,u) \to b(t,u)$ измеримо по t и непрерывно по $u \in V$, причем

$$\sup_{\beta \in b(t,u)} \|\beta\| \leqslant \beta_1(t), \forall (t,u) \in T \times V, \beta_1(\cdot) \in L_1(T).$$

О п р е д е л е н и е 1. Измеримые ограниченные m-вектор-функции $u = u(t), t \in T$ такие, что $u(t) \in V$ почти всюду на T, назовем допустимыми управлениями системы (2). Множество всех допустимых управлений системы (2) обозначим через U.

О п р е д е л е н и е 2. Допустимой траекторией, соответствующей управлению $u(\cdot) \in U$ и начальной функции $\varphi_0(\cdot) \in C^n(T_0)$, называется непрерывная на $T_1 = [t_0 - h, t_1]$ и абсолютно непрерывная на T n-вектор-функция $x = x(t)$, удовлетворяющая дифференциальному включению (2) и начальному условию $x(t) = \varphi_0(t)$, $t \in T_0 = [t_0 - h, t_0]$.

Пусть $H(u, \varphi_0)$ — множество всех допустимых траекторий системы (2), соответствующих управлению $u(\cdot) \in V$ и начальной функции $\varphi_0(\cdot) \in C^n(T_0)$, $X(t,u,\varphi_0) = \{\xi \in R^n : \xi = x(t),\ x(\cdot) \in H(u,\varphi_0)\}$, $t \in T$ — ансамбль траекторий системы (2). Пусть на траекториях $x(\cdot) \in H(u,\varphi_0)$ определен терминальный функционал $J(x(\cdot)) = g(x(t_1))$, где $g(x) = \min\limits_{z \in Z}(z,x)$, Z — непустой компакт из R^n. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$G(u) = \sup_{x(\cdot) \in H(u,\varphi_0)} J(x(\cdot)), \tag{3}$$

то есть минимаксную задачу

$$\sup_{\xi \in X(t_1,u,\varphi_0)} g(\xi) \to \min,\ u \in V. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований ЦНИТ РУз (грант №1Ф.1.1.16)

§ 2. Условия оптимальности

Пусть $F(t,\tau)$ — $n\times n$-матричная функция такая, что

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial\tau} = -F(t,\tau)A(\tau) - F(t,\tau+h)A_1(\tau+h),\ \tau\leqslant t,$$
$$F(t,t-0)=E,\ F(t,\tau)=0,\ \tau\geqslant t+0,$$

где E — единичная $n\times n$-матрица. Положим

$$S(\varphi_0) = F(t_1,t_0)\varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t_1,t)A_1(t)\varphi_0(t-h)dt.$$

Т е о р е м а 1. *Для функционала* (3) *справедлива формула*

$$G(u) = \min_{z\in coZ}\Big[(S(\varphi_0),z) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u(t)),z)dt\Big],$$

где coZ *— выпуклая оболочка множества* Z *,* $C(Q,z)=\sup\limits_{q\in Q}(q,z)$ *— опорная функция компакта* $Q\subset R^n$ *.*

Приведем необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (4).

Т е о р е м а 2. *Для того, чтобы управление* $u^*(t), t\in T$ *было оптимальным в задаче* (4), *необходимо и достаточно существование вектора* $z^*\in coZ$, *являющегося точкой глобального минимума функции*

$$\mu(z) = (S(\varphi_0),z) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,v),z)dt \tag{5}$$

для почти всех $t\in T$.

Пусть в (2) $b(t,u)=B(t)u+W(t)$, где $B(t)$ — $n\times m$-матрица, элементы которой суммируемы на T, $W(t)\subset R^n$ — непустой компакт из R^n, многозначное отображение $t\to W(t)$ измеримо на T, причем $\sup\limits_{\omega\in W(t)}\|\omega\|\leqslant\omega_0(t)$, $\omega_0(\cdot)\in L_1(T)$. Тогда модель (2) описывает поведение системы управления

$$\dot{x} = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u + \omega(t),\ t\geqslant t_0, \tag{6}$$

где $\omega(t)$ — параметр неизвестных внешних воздействий, $\omega(t)\in W(t)$, $\omega(\cdot)\in L_1(t)$. Условие минимума (5) в минимаксной задаче (4) для системы (6) упрощается и принимает вид

$$(F(t_1,t)B(t)u^*(t),z^*) = \min_{v\in V}(F(t_1,t)B(t)v,z^*),\ t\in T.$$

Список литературы

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Исраилов И., Отакулов С. Об одном свойстве ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием //Труды международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологии». Ташкент. 2003. Т. 2. С. 213-215.
3. Otakulov S. On the minimization problem of reachable set eshimation of control system//Proc. IFAC Workshop on Generalized Solutions in Control Problems (GSCP-2004). Pereslavl-Zalessky. 2004. P. 212-217.
4. Отакулов С. Холиярова Ф. Х. К теории управляемых дифференциальных включений с запаздывающим аргументом//Докл.АН РУз. 2005. № 3. С. 14-17.

Отакулов Салим Отакулович
Самаркандский государственный ун-т,
Узбекистан, Самарканд
e-mail: otakulov@mail.ru