УДК 517.911/517.93

© Е. А. Панасенко

УСТОЙЧИВО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

§ 1. Динамические системы и дифференциальные включения

Пусть (Ω, g^t) — топологическая динамическая система, то есть Ω — полное метрическое пространство с метрикой ρ, g^t — однопараметрическая группа преобразований фазового пространства Ω в себя, непрерывно зависящая от (t, ω). Напомним [1, с. 156–206], что замкнутое множество $\mathfrak{M} \subset \Omega$ называется *положительно инвариантным* (относительно потока g^t), если $g^t\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ для всех $t \geqslant 0$. Далее, множество $\mathfrak{M}$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого ω, удовлетворяющего неравенству $\rho(\omega, \mathfrak{M}) \leqslant \delta$ при всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство $\rho(g^t\omega, \mathfrak{M}) \leqslant \varepsilon$. Кроме того, если $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову и найдется такое $r > 0$, что $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(g^t\omega, \mathfrak{M}) = 0$ для любого ω из r-окрестности множества $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* (в этом случае $\mathfrak{M}$ называют также *аттрактором*).

Для заданной топологической динамической системы (Σ, f^t) и функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$, определённой на $\Sigma\times\mathbb{R}^n$ и принимающей значения в $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаудорфа dist, рассмотрим семейство дифференциальных включений вида

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Далее предполагается, что поток $t \to f^t\sigma$ на Σ локально липшицев по t; при каждом $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to F(f^t\sigma, x)$ локально интегрируема по Лебегу и при любом фиксированном x ограничена в существенном на $\mathbb{R}$, а функция $x \to F(\sigma, x)$ локально липшицева по x (равномерно по σ на ограниченных множествах в Σ).

Каждой паре $(\sigma, X) \in \Sigma\times\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и любому t поставим в соответствие сечение $S(t, \sigma, X)$ интегральной воронки «овыпукленного» включения

$$\dot{x} \in \mathrm{co}\, F(f^t\sigma, x) \tag{2}$$

(напомним, что $S(t, \sigma, X)$ это совокупность значений в момент времени t всех решений включения (2), когда начальное значение пробегает множество X). Нетрудно проверить, что на пространстве $\Omega = \Sigma \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой $\varrho = \rho + \mathrm{dist}$ действует поток g^t, определенный равенством $t \to g^t\omega = (f^t\sigma, S(t, \omega))$. Построенная таким образом динамическая система (Ω, g^t) называется *расширением* динамической системы (Σ, f^t).

Пусть задана непрерывная функция $M : \Sigma \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Построим расположенное в Ω множество

$$\mathfrak{M} \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega : X \subset M(\sigma)\} \tag{3}$$

и r-окрестность $\mathfrak{M}^r \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega : X \subset M^r(\sigma)\}$ этого множества (здесь $M^r(\sigma)$ определяет открытую r-окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$). Из ранее сказанного следует, что *устойчивость по Ляпунову множества* (3) *относительно включения* (1) означает следующее: если X — произвольный компакт в $M(\sigma)$, то $S(t, \sigma, X) \subset M(f^t\sigma)$ при всех $t \geqslant 0$ и любому $\varepsilon \in (0, r)$ отвечает такое $\delta > 0$, что если $X \subset M^\delta(\sigma)$, то $S(t, \sigma, X) \subset M^\varepsilon(f^t\sigma)$ при всех $t \geqslant 0$. Аналогичным образом, *асимптотическая устойчивость по Ляпунову множества* $\mathfrak{M}$ *относительно включения* (1) означает устойчивость по Ляпунову и равенство $\lim\limits_{t\to\infty} d\big(S(t, \sigma, X), M(f^t\sigma)\big) = 0$ при всех X достаточно близких (в метрике Хаусдорфа) к $M(\sigma)$. Здесь $d(A, B)$ — полуотклонение множества A от множества B.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-01-00324).

§ 2. Функции Ляпунова и теоремы об устойчивости

Одноточечные множества $\{x\}$ пространства $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ будем отождествлять с точками пространства $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, обозначать строчными буквами и без фигурных скобок. Такая договоренность позволяет писать $\omega=(\sigma,x)\in\Omega$ вместо $\omega=(\sigma,\{x\})\in\Omega$, что упрощает запись и не приводит к разночтениям.

Пусть заданы положительное число r и непрерывная скалярная функция $V(\omega)$, где $\omega=(\sigma,x)\in\mathfrak{M}^r$. Будем говорить, что функция V *определённо положительна* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если во-первых, $V(\omega)\leqslant 0$ для всех $\omega\in\mathfrak{M}$ и, во-вторых, для любого $\varepsilon\in(0,r)$ выполнено неравенство $\inf\limits_{\omega}\{V(\omega)\colon\ \omega\in\partial\mathfrak{M}^{\varepsilon}\}>0$. Для заданного $r>0$ и функции $V\colon\mathfrak{M}^r\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей локальному условию Липшица, *обобщенной производной* функции $\omega\to V(\omega)$ в точке $\omega=(\sigma,x)$ по направлению вектора $q=(1,h)\in\mathbb{R}^{1+n}$ (производной Ф. Кларка [2]) будем называть следующий (верхний) предел

$$V^o(\omega;q)\doteq\limsup_{y\to x,\,\delta\to+0}\frac{V(f^{\delta}\sigma,y+\delta h)-V(\sigma,y)}{\delta}.$$

Далее, выражение $V^o_F(\omega)\doteq\max\limits_{h\in F(\omega)}V^o(\omega;q)$ будем называть *производной функции V в силу включения* (1). Обозначим $\mathfrak{N}^r=\{\omega=(\sigma,x)\in\mathfrak{M}^r\colon\ \omega\notin\mathfrak{M}\}$.

Т е о р е м а 1. *Если существует локально липшицева определенно положительная функция $V\colon\mathfrak{M}^r\to\mathbb{R}$, производная которой в силу включения* (1) *при всех $\omega\in\mathfrak{N}^r$ удовлетворяет неравенству $V^o_F(\omega)\leqslant 0$, то множество $\mathfrak{M}$, определенное равенством* (3), *устойчиво по Ляпунову относительно включения* (1).

Будем говорить, что множество $\mathfrak{S}_F\doteq\{\omega=(\sigma,x)\in\mathfrak{N}^r\colon\ V^o_F(\omega)=0\}$ *не содержит положительных полутраекторий* включения (1), если для любого $\omega\in\mathfrak{S}_F$, и каждого решения $x(t,\omega)$ включения (1) найдётся $\vartheta>0$, что $V^o_F(g^{\vartheta}\omega)<0$. Другими словами, $\mathfrak{S}_F$ не содержит положительных полутраекторий включения (1), если для любого $\omega\in\mathfrak{S}_F$ всякое движение $t\to(f^t\sigma,x(t,\omega))$, где $x(t,\omega)$ — решение включения (1), покидает $\mathfrak{S}_F$ за конечное время.

Формилируемая ниже теорема распространяет известный результат Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [3], [4, с. 19] на неавтономные дифференциальные включения.

Т е о р е м а 2. *Если существует локально липшицева определённо положительная функция $V:\mathfrak{M}^r\to\mathbb{R}$, производная которой в силу включения* (1) *при всех $\omega\in\mathfrak{N}^r$ удовлетворяет неравенству $V^o_F(\omega)\leqslant 0$ и такая, что множество $\mathfrak{S}_F$ не содержит положительных полутраекторий включения* (1), *то $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно включения* (1).

Список литературы

1. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Арнольд В. И., Бронштейн И. У., Гринес В. З., Ильяшенко Ю. С. Динамические системы–1. // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 1. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. 244 с.
2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука. 1988. 300 с.
3. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. // ДАН СССР. 1952. Т. 86. № 6.
4. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука. 1970. 240 с.

Панасенко Елена Александровна
Тамбовский государственный ун-т,
Россия, Тамбов
e-mail: panlena_t@mail.ru