УДК 517.955

© **Н. И. Погодаев**

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ГУРСА-ДАРБУ С ГРАНИЧНЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Пусть $I_1=[0,a]$, $I_2=[0,b]$, $a,b>0$ $\Omega=I_1\times I_2$; $X=\mathbb{R}^N$, $Y=\mathbb{R}^M$; $C(\Omega,X)$, $C(I_1,X)$, $C(I_2,X)$ — пространства непрерывных отображений соответственно из Ω, I_1, I_2 в X с sup-нормами; $\mathscr{L}(Y,X)$ — пространство непрерывных линейных операторов из Y в X (матриц размера $N\times M$).

Рассмотрим управляемую систему

$$z_{xy}=F\big(x,y,z(x,y)\big)+A\big(x,y,z(x,y)\big)u(x,y), \tag{1}$$

$x\in I_1$, $y\in I_2$, $z\in X$ с граничными условиями

$$z(x,0)=\varphi(x)+\int\limits_0^x u^1(s)\,ds,\quad z(0,y)=\psi(y)+\int\limits_0^y u^2(t)\,dt,\quad \varphi(0)=\psi(0) \tag{2}$$

и со смешанными ограничениями на управления

$$u(x,y)\in\mathscr{U}\big(x,y,z(x,y)\big),\quad u^1(x)\in\mathscr{U}_1\big(x,\mathscr{V}_1(z)(x)\big),\quad u^2(y)\in\mathscr{U}_2\big(y,\mathscr{V}_2(z)(y)\big). \tag{3}$$

Здесь $A\colon\Omega\times X\to\mathscr{L}(Y,X)$, $F\colon\Omega\times X\to X$ — однозначные отображения; $\mathscr{U}:\Omega\times X\to Y$, $\mathscr{U}_1\colon I_1\times X\to X$, $\mathscr{U}_2\colon I_2\times X\to X$ — многозначные отображения с компактными значениями; $\mathscr{V}_1\colon C(\Omega,X)\to C(I_1,X)$, $\mathscr{V}_2\colon C(\Omega,X)\to C(I_2,X)$ — непрерывные нелинейные операторы; $\varphi\in C(I_1,X)$, $\psi\in C(I_2,X)$.

Наряду с ограничениями (3) будем рассматривать ограничения

$$u(x,y)\in\operatorname{co}\mathscr{U}\big(x,y,z(x,y)\big),\quad u^1(x)\in\operatorname{co}\mathscr{U}_1\big(x,\mathscr{V}_1(z)(x)\big),\quad u^2(y)\in\operatorname{co}\mathscr{U}_2\big(y,\mathscr{V}_2(z)(y)\big) \tag{4}$$

и

$$u(x,y)\in\operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}\big(x,y,z(x,y)\big),u^1(x)\in\operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}_1\big(x,\mathscr{V}_1(z)(x)\big),u^2(y)\in\operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}_2\big(y,\mathscr{V}_2(z)(y)\big), \tag{5}$$

где символ $\operatorname{co}E$ обозначает выпуклую оболочку множества E, а $\operatorname{ext}\operatorname{co}E$ — совокупность всех крайних точек множества $\operatorname{co}E$.

О п р е д е л е н и е 1. Решением управляемой системы (1)–(3) называется четверка (z,u,u^1,u^2), $z\in C(\Omega,X)$, $u\in L_1(\Omega,Y)$, $u^1\in L_1(I_1,X)$, $u^2\in L_1(I_2,X)$, такая, что

$$\begin{aligned}z(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(0)+\int\limits_0^x u^1(s)\,ds+\int\limits_0^y u^2(t)\,dt+\\ +\int\limits_0^x\int\limits_0^y\Big(F\big(s,t,z(s,t)\big)+A\big(s,t,z(s,t)\big)u(s,t)\Big)\,ds\,dt,\end{aligned}$$

и почти всюду выполняются включения (3). Аналогично определяются решения систем (1), (2), (4) и (1), (2), (5).

Множества решений системы (1) с ограничениями (3), (4), (5) обозначим соответственно $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$.

При определенных и достаточно стандартных предположений относительно функции A, F, $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$, $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$, справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Множества $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$ не пусты и $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ является компактом в пространстве*

$$C(\Omega, X) \times w\text{-}L_1(\Omega, Y) \times w\text{-}L_1(I_1, X) \times w\text{-}L_1(I_2, X) \tag{6}$$

Здесь $w\text{-}L_1(\Omega, Y)$, $w\text{-}L_1(I_1, X)$ и $w\text{-}L_1(I_2, X)$ — соответственно пространства $L_1(\Omega, Y)$, $L_1(I_1, X)$ и $L_1(I_2, X)$, наделенные слабой топологией.

В следующих теоремах предполагаем, что $\mathscr{U}_2$ не зависит от z.

Т е о р е м а 2.

$$\mathscr{R}_{\mathrm{co}} = \overline{\mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}},$$

где черта означает замыкание в пространстве (6).

Т е о р е м а 3. *Если для любого $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}$ выполняется хотя бы одно из неравенств*

(i) $\mu_2\Big\{(x, y) \in \Omega \colon \mathscr{U}\big(x, y, z(x, y)\big) \neq \mathrm{co}\, \mathscr{U}\big(x, y, z(x, y)\big)\Big\} > 0$,

(ii) $\mu_1\Big\{x \in I_1 \colon \mathscr{U}_1\big(x, \mathscr{V}_1(z)(x)\big) \neq \mathrm{co}\, \mathscr{U}_1\big(x, \mathscr{V}_1(z)(x)\big)\Big\} > 0$,

(iii) $\mu_1\big\{y \in I_2 \colon \mathscr{U}_2(y) \neq \mathrm{co}\, \mathscr{U}_2(y)\big\} > 0$,

то

$$\mathscr{R}_{\mathrm{co}} = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}}.$$

Здесь μ_2 — мера Лебега на $\mathbb{R}^2$, μ_1 — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Т е о р е м а 4. *Множество $\mathscr{R}$ является замкнутым в пространстве (6) тогда и только тогда, когда для каждого $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}$ выполняются равенства*

(i) $\mathscr{U}\big(x, y, z(x, y)\big) = \mathrm{co}\, \mathscr{U}\big(x, y, z(x, y)\big)$ *почти всюду на* Ω,

(ii) $\mathscr{U}_1\big(x, \mathscr{V}_1(z)(x)\big) = \mathrm{co}\, \mathscr{U}_1\big(x, \mathscr{V}_1(z)(x)\big)$ *почти всюду на* I_1,

(iii) $\mathscr{U}_2(y) = \mathrm{co}\, \mathscr{U}_1(y)$ *почти всюду на* I_2.

В основу доказательств положены теоремы о непрерывных селекторах многозначных отображений с невыпуклыми значениями [1], [2] и теоремы о неподвижных точках.

Автор выражает признательность А. А. Толстоногову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Analysis. 1996. Vol. 4. №. 2. P. 173–203.
2. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Analysis. 1996. Vol. 4. No. 3. P. 237–269.

Погодаев Николай Ильич
ИДСТУ СО РАН,
Россия, Иркутск
e-mail: npogo@mail.ru