

УДК 517.984

© Д. А. Сивков

О ПОГРЕШНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПО РАНГУ БЛОКОВ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где $x(t)$ принадлежит некоторому гильбертову пространству H , $A(t)$ — ω -периодический по времени оператор в H , $A(t)$ компактен при любом $t \in [0, \omega]$, сильно измерим и интегрируем по Бохнеру на отрезке $[0, \omega]$. $X(t) = F(t)e^{tQ}$ — представление Флоке оператора Коши системы (1). Будем предполагать, что Q имеет полную систему ортонормированных собственных функций ϕ_1, ϕ_2, \dots .

Следующая теорема дает вид минимального по рангу блока обратной связи (см. [1,2]).

Т е о р е м а 1. *Возмущение вида $u(t) = F(t)SF^{-1}(t)x(t)$ для уравнения (1) переводит Ω — произвольно заданное подмножество спектра $X(\omega) \setminus \{0\}$, в целевое множество $\Theta = \exp(\kappa)$, где κ — заданное множество, $S = a(x, b)$, $a = \sum_{j \geq 1} \alpha_j \phi_j$, $b = \sum_{j \geq 1} \bar{\beta}_j \phi_j$, если найдутся*

- две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, что:*
- а) $\alpha_j \beta_j = 0$ для индексов j , не принадлежащих $\{k_1, \dots, k_l\}$;*
 - б) $\alpha_{k_i} \beta_{k_i} = \frac{P(\lambda_{k_i})}{\prod_{j=1, j \neq i}^l (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}$, $i = \overline{1, n}$, где $P(\mu)$ — некоторый многочлен степени l со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого принадлежат множеству κ , $\exp(\{\lambda_i\}) = \Omega$.*

Следующая теорема дает теоретическую оценку погрешности при численном построении блоков обратной связи.

Т е о р е м а 2. *Для любого конечномерного оператора \tilde{S} такого, что*

$$\text{rank } \tilde{S} = \text{rank } S, \quad \|S - \tilde{S}\| < \min_{\lambda \in \Omega} \|R(\lambda; Q - S)\|^{-1},$$

$\tilde{u}(t) = F(t)\tilde{S}F^{-1}(t)$ переводит Ω в $\tilde{\Theta}$, вид $\tilde{\Theta}$ может быть получен.

При известных погрешностях начальных данных погрешности спектра оператора монодромии возмущенной системы удобно оценивать по первому приближению.

Пусть $\gamma_j \doteq \alpha_{k_j} \beta_{k_j} \doteq f_j(\lambda, \kappa)$.

Тогда якобиан преобразования f имеет вид

$$\frac{Df}{D\kappa} = - \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m (\kappa_i - \kappa_j)}{m \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{i-1} (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}.$$

Для модельной задачи теплопроводности (см. [2]) были получены точные значения погрешностей спектра оператора монодромии (см. рисунок 1).

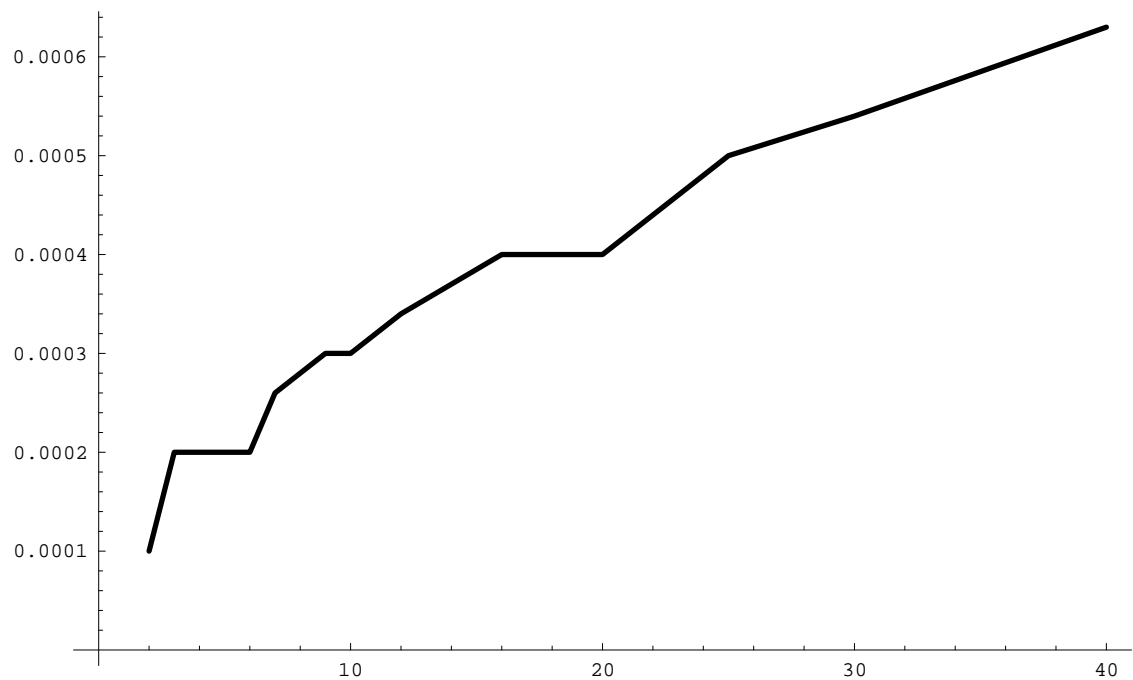


Рис. 1: Зависимость погрешности от мощности множества Ω

Список литературы

1. Исламов Г.Г. Свойства одноранговых возмущений// Изв. Вузов. Математика. 1989. № 4. С. 29–35.
2. Сивков Д.А. Управление спектром периодических систем возмущениями минимального ранга// Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2005. Вып. 3(33). С. 3–94.

Сивков Дмитрий Анатольевич
 Удмуртский государственный ун-т,
 Россия, Ижевск
 e-mail: dimasiv@udm.ru