УДК 517.955

© Н. Н. Субботина, Т. Б. Токманцев

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИПШИЦЕВЫМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ[1]

Введение

Рассмотрена задача оптимального управления с фиксированным моментом окончания и функционалом типа Больца. Предполагается, что входные данные задачи липшицевы. Введена обобщенная характеристическая система уравнения Беллмана. Ее решения использованы для получения формула функции цены рассматриваемой задачи.

§ 1. Задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления системой

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in [t_0, T] \subset [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $P \subset \mathbb{R}^m$ — компакт. Целью управления является минимизация функционала платы типа Больца:

$$I_{t_0,x_0}(x(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(T; t_0, x_0, u(\cdot))) + \int\limits_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t))dt \to \inf_{u(\cdot)\in\mathbf{U}}, \tag{2}$$

где $x(\cdot)$ – траектория динамической системы (1), стартующая из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием измеримого управления $u(\cdot) : [t_0, T] \to P$ (программы). Множество всех программ обозначаем символом U. Отображение

$$(t_0, x_0) \mapsto V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)\in\mathbf{U}} I_{t_0,x_0}(x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))) : \ \tilde{\Gamma}_T \mapsto \mathbb{R} \tag{3}$$

называется *функцией цены* в рассматриваемой задаче. Задача рассматривается в полосе $\tilde{\Gamma}_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ (замыкании $\Gamma_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$) при следующих предположениях о входных данных.

A1. Функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ в (1), (2) определены на $\tilde{\Gamma}_T \times P$ и липшицевы относительно t и x равномерно по u. Для них при всех $(t, x, u) \in \tilde{\Gamma}_T \times P$ выполняются условия продолжимости.

A2. Функция $\sigma(x)$ в (2) определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ вместе со своими частными производными $\partial\sigma/\partial x_i$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим $D\sigma(x) = (\partial\sigma/\partial x_1, \ldots, \partial\sigma/\partial x_n)$.

A3. Для любых $(t, x) \in \tilde{\Gamma}_T$, $p \in \mathbb{R}^n$, множества $\mathrm{Arg} \min\limits_{(f,g)\in E(t,x)} [\langle p, f\rangle + g]$ состоят из единственного элемента $(f^0(t, x, p), g^0(t, x, p))$. Здесь $E(t, x) = \{(f(t, x, u), g(t, x, u)) \colon u \in P\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — символ скалярного произведения.

§ 2. Обобщенная характеристическая система

Липшицевость входных данных приводит к необходимости обобщения характеристической системы [1] уравнения Беллмана:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = & D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p}) = f^0(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \dfrac{d\hat{p}}{dt} \in & -\partial^{cl}_{\hat{x}} H(t, \hat{x}, \hat{p}), \\ \dfrac{d\hat{z}}{dt} = & \langle \hat{p}, D_{\hat{p}} H(t, \hat{x}, \hat{p})\rangle - H(t, \hat{x}, \hat{p}) = -g^0(t, \hat{x}, \hat{p}), \end{array} \right. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 05–01–00609, 05–01–00601), гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (проект НШ–8512.2006.1)

где символ $\partial^{cl}_{\hat{x}} H(t,\hat{x},\hat{p})$ означает частный субдифференциал Кларка [1] по $\hat{x}$ гамильтониана $H(t,\hat{x},\hat{p}) = [\langle \hat{p}, f^0(t,\hat{x},\hat{p})\rangle + g^0(t,\hat{x},\hat{p})]$. Согласно (1)–(2), рассмотрим краевые условия вида

$$\hat{x}(T,y) = y,\ \hat{p}(T,y) = D\sigma(y),\ \hat{z}(T,y) = \sigma(y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

§ 3. Репрезентативная формула для функции цены

Для любой точки $(t,x) \in \Gamma_T$ и вектора $h \in \mathbb{R}^n$ определим для функции цены множество

$$\partial_h V(t,x) = \mathrm{co}\left\{ \lim_{\delta_k \downarrow 0, h'_k \to h, k\to\infty} \left(\frac{\partial V(t+\delta_k, x+\delta_k h'_k)}{\partial t}, D_x V(t+\delta_k, x+\delta_k h'_k) \right) \right\}$$

по всевозможным последовательностям точек ее дифференцируемости $(t+\delta_k, x+\delta_k h'_k)$.

Л е м м а 1. *Для любой точки* $(t,x) \in \Gamma_T$ *и вектора* $h \in \mathbb{R}^n$ *справедливы неравенства*

$$\min_{(\alpha,p)\in\partial_h V(t,x)} \langle (\alpha,p)(1,h)\rangle \leqslant d^- V(t,x)/(1,h) \leqslant d^+ V(t,x)/(1,h) \leqslant \max_{(\alpha,p)\in\partial_h V(t,x)} \langle (\alpha,p)(1,h)\rangle.$$

Здесь символ $d^+ V(t,x)/(1,h)$ $\big(d^- V(t,x)/(1,h)\big)$ означает верхнюю (нижнюю) полупроизводную Дини [3] функции цены $V(\cdot)$ в точке (t,x) по направлению $(1,h)$.

Согласно [4], при сделанных выше предположениях A1–A3 функция цены (3) является локально липшицевой, и при всех $(t,x) \in \Gamma_T$ она удовлетворяет следующему обобщенному уравнению Беллмана

$$\min_{(f,g)\in\ \mathrm{co}\, E(t,x)} [d^{\pm} V(t,x)/(1,f) + g] = 0,$$

где символ co означает выпуклую оболочку.

Л е м м а 2. *Для любой точки* $(t,x) \in \Gamma_T$ *и вектора* $(\overline{f},\overline{g}) \in \mathrm{co}\, E(t,x)$, *удовлетворяющих равенству* $d^{\pm} V(t,x)/(1,\overline{f}) + \overline{g} = 0$, *существуют* $(\alpha,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *такие, что*

$$\overline{f} = f^0(t,x,p), \quad \overline{g} = f^0(t,x,p), \qquad \alpha = -\langle p, f^0(t,x,p)\rangle + g^0(t,x,p),$$

$$(\alpha,p) \in \partial_{f^0(t,x,p)} V(t,x).$$

Т е о р е м а 1. *Если в задаче* (1)–(2) *выполнены предположения* A1–A3, *то для любой точки* $(t_0,x_0) \in \Gamma_T$ *функция цены* (3) *определяется формулой*

$$V(t_0,x_0) = \min\{\hat{z}(t_0,y) : \quad \hat{x}(t_0,y) = x_0\},$$

причем при всех $t \in [t_0,T]$ *вдоль соответствующего решения характеристической системы* (4) $\hat{x}(t,y) = x$, $\hat{p}(t,y) = p$ *выполняется включение*

$$\big(-\langle p, f^0(t,x,p)\rangle + g^0(t,x,p),\ p\big) \in \partial_{f^0(t,x,p)} V(t,x).$$

Список литературы

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
2. Субботина Н.Н. Метод характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. Дифференциальные уравнения, Т. 20, Тбилиси: Акад. Наук Грузии, Ин-т Кибернетики, 2004. 132 с.
3. Subbotin A.I. Generalized Solutions of First Order PDEs:The dynamical Optimization Perspectives. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
4. Субботина Н.Н. Обобщенное уравнение Беллмана в задаче оптимального управления с локально-липшицевыми входными данными//Известия Уральского госуниверситета. 2003, Т.26, № 5. С.148-157.

Субботина Нина Николаевна
Институт математики и механики Уро РАН,
Россия, Екатеринбург
e-mail: subb@uran.ru

Токманцев Тимофей Борисович
Институт математики и механики Уро РАН,
Россия, Екатеринбург
e-mail: Tokmantsev@imm.uran.ru