УДК 517.95

© **В. И. Сумин**

ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ[1]

Условия сохранения глобальной разрешимости (УСГР) управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) играют важную роль в различных разделах теории оптимального управления. Так, например, в теории *необходимых условий оптимальности* (НУО) недостаток информации об УСГР нелинейной управляемой НКЗ (при возмущении управления) часто вынуждает считать НКЗ сингулярной в смысле [1] и переходить от классического случая «управление $\to$ состояние» к рассмотрению оптимизационных задач в классе пар «управление, состояние», когда «управление» и «состояние» равноправны. При этом теоретические построения в сингулярном случае могут быть существенно более сложными, чем соответствующие построения в несингулярном случае (см., например, вывод НУО в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в главах 1 и 2 книги [1]).

Для сосредоточенных нелинейных управляемых систем простейшие варианты теорем о достаточных УСГР дают классические теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от числового параметра, входящего в правую часть обыкновенного дифференциального уравнения. Более общие случаи и теоремы рассмотрены, например, в [2], [3]. Поиску подобных общих теорем УСГР для нелинейных распределенных систем уделялось относительно мало внимания. Одной из первых публикаций в этом направлении явилась, видимо, работа [4]. В ней были получены достаточно общие УСГР управляемой задачи Гурса-Дарбу, которая давно является «пробным камнем» распределенной оптимизации. Однако, долгое время условия УСГР управляемых нелинейных НКЗ изучались в основном лишь при специальных, требующихся, например, для получения тех или иных НУО, возмущениях (вариациях) управлений (см., например, [5], [6]).

В [7] была предложена и в [8] – [11] развита довольно общая схема получения достаточных УСГР (при возмущении управления) для распределенных управляемых систем, основанная на приведении НКЗ к *вольтеррову функциональному уравнению* (ВФУ) вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m(\Pi), \tag{1}$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — фиксированное ограниченное измеримое по Лебегу множество изменения независимых переменных t, $f(t,\mathbf{p},\mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — заданная функция, $v(\cdot)$ — управление из некоторого множества $\mathcal{V} \subset L_k^s(\Pi)$, $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^l(\Pi)$ — линейный ограниченный оператор, являющийся вольтерровым на некоторой системе $\mathcal{T}$ подмножеств основного множества Π в том смысле, что $\forall \ H \in \mathcal{T}$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \backslash H$, $p, q, k \in [1, +\infty]$. Приведенное определение «оператора, вольтеррова на системе множеств», предложенное в [8], является непосредственным многомерным обобщением известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра [12]. К ВФУ (1) с богатыми системами $\mathcal{T}$ естественным образом (обращением главной части) приводятся многие управляемые НКЗ для эволюционных уравнений (см., например, [7] ,[9]–[11], [13]–[16]).

В [10] получены УСГР уравнений (1), рассматриваемых над пространством $L_\infty^m(\Pi)$, при возмущении оператора A. Там же теоремы об УСГР управляемых уравнений специального вида (1) распространены на нелинейные ВФУ второго рода общего вида

$$z(t) = F[z](t), t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00460).

рассматриваемые над пространством $L_{\infty}^{m}(\Pi)$, — сформулированы достаточные УСГР уравнения (2) при возмущении нелинейного вольтеррова оператора F. В [14]–[15] схема [7]–[11] распространена на случай вольтерровых операторных уравнений второго рода общего вида

$$z = F[z] \tag{3}$$

в банаховом пространстве; при этом свойство «вольтерровость функционального оператора A на системе множеств» в смысле [7], [8] заменяется более общим свойством «вольтерровость на системе проекторов» действующего в банаховом пространстве нелинейного оператора F. В [14]–[15] получены УСГР операторных уравнений (3) при возмущении оператора правой части. Упомянутые УСГР вольтерровых уравнений при возмущении оператора нашли конкретное применение в задачах об управлении старшими коэффициентами уравнений с частными производными (см., например, [14] и [16]). Краткий обзор по рассматриваемой теме «ВФУ и УСГР НКЗ» содержится в [15].

В докладе обсуждаются варианты удобных для приложений УСГР вольтерровых уравнений, их реализация в случае конкретных НКЗ и использование в теории оптимизации. В качестве иллюстрации приведем пример из [16].

Пусть $\underline{c},\ \overline{c},\ \widehat{c},\ T_1,\ T_2$ — заданные неотрицательные числа, $0 < \underline{c} \leqslant \overline{c},\ 0 < 2\overline{c}T_1 \leqslant T_2$. Множество $\Pi \equiv \left\{t \equiv \{t_1, t_2\} \in \mathbf{R}^2 : \overline{c}t_1 \leqslant t_2 \leqslant T_2 - \overline{c}t_1, 0 \leqslant t_1 \leqslant T_1\right\}$ играет далее роль основного множества изменения независимых переменных $t \equiv \{t_1, t_2\} \in \mathbf{R}^2$. Рассмотрим управляемую задачу Коши для полулинейного волнового уравнения

$$\mathcal{L}_c[x] \equiv x''_{t_1t_1} - (c(t_1))^2 x''_{t_2t_2} = g(t, x(t)),\ t \in \Pi, \tag{4}$$

$$x(0, t_2) = 0,\ \ x'_{t_1}(0, t_2) = 0 \ \text{ при } \ t_2 \in [0, T_2], \tag{5}$$

в которой $g(t,l)\colon \Pi \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — заданная функция, $c(t_1)\colon\ [0, T_1] \to \mathbf{R}$ — управление. Допустимыми считаем управления $c(\cdot)$ из некоторого множества D, принадлежащего классу $\mathcal{D}$ абсолютно непрерывных на отрезке $[0, T_1]$ функций, удовлетворяющих неравенствам $\underline{c} \leqslant c(t_1) \leqslant \overline{c},\ \ |c'(t_1)| \leqslant \widehat{c}$ при $t_1 \in [0, T_1]$. Пусть функции $g(t,l)$ и $g'_l(t,l)$ измеримы по t при любых $l \in \mathbf{R}$, непрерывны по l для почти каждого $t \in \Pi$, ограничены на любом ограниченном множестве.

При указанных условиях решение задачи (4), (5) естественно понимать в следующем обобщенном смысле. Обозначим через Γ «нижнее основание» $\{t \in \partial\Pi : t_1 = 0\}$ трапеции Π. Для любых функций $x(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$, $c(\cdot) \in D$, $\eta(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$, $z(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$ положим

$$J[x(\cdot), c(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot)] \equiv \int_\Pi \left\{x'_{t_1}(t)\,\eta'_{t_1}(t) - (c(t_1))^2 x'_{t_2}(t)\,\eta'_{t_2}(t) + z(t)\,\eta(t)\right\} dt.$$

Решением задачи (4), (5), отвечающим управлению $c(\cdot) \in D$, назовем функцию $x(\cdot) \in W_\infty^1(\Pi)$, для которой при любой $\eta(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющей условию

$$\eta(t) = 0 \ \text{ при } \ t \in \partial\Pi\backslash\Gamma, \tag{6}$$

выполняется равенство $J[x(\cdot), c(\cdot), \eta(\cdot), g(\cdot, x(\cdot))] = 0$. Такое определенное на всем множестве Π решение естественно называть глобальным решением задачи (4), (5). Наряду с глобальными можно рассматривать и локальные решения этой задачи, определенные, например, на пересечениях множества Π с полосами $\Theta_\tau \equiv \left\{t \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant t_1 \leqslant \tau\right\}$ при некоторых $\tau \in (0, T_1)$. Обозначим через $\mathcal{T}$ семейство всех возможных пересечений $\Pi \cap \Theta_\tau,\ \ \tau \in (0, T_1]$. Обобщенное решение задачи (4), (5), отвечающее управлению $c(\cdot) \in D$ на произвольном множестве $H \in \mathcal{T}$, можно определить совершенно аналогично тому, как выше было определено глобальное решение. Каково бы ни было $H \in \mathcal{T}$, любому $c(\cdot) \in D$ не может отвечать на множестве H более одного решения задачи (4), (5).

Пусть Ω — множество всех тех допустимых управлений, каждому из которых отвечает глобальное решение задачи (4),(5). Чтобы сформулировать достаточные УСГР задачи (4),

(5) при возмущении управления, рассмотрим вспомогательную задачу Коши для линейного волнового уравнения

$$\mathcal{L}_c\,[x] = z(t),\ t \in \Pi, \tag{7}$$

$$x\,(0, t_2) = 0,\quad x'_{t_1}\,(0, t_2) = 0 \ \text{ при } \ t_2 \in [0, T_2]\,, \tag{8}$$

в которой $c(\cdot) \in D,$ $z(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$. Функцию $x(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$ назовем решением задачи (7), (8), если $x(0,t^2) = 0$ при $0 \leqslant t^2 \leqslant T^2$ и для любой $\eta\,(\cdot) \in W_2^1(\Pi),$ удовлетворяющей условию (6), выполняется равенство $J\,[x\,(\cdot)\,, c\,(\cdot)\,, \eta\,(\cdot)\,, z(\cdot)] = 0.$ При фиксированных $c(\cdot) \in D,$ $z(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$ задача (7), (8) имеет единственное в $W_2^1(\Pi)$ глобальное решение, которое нам удобно обозначить $A_c[z](t),$ $t \in \Pi:$

$$x\,(t) = A_c[z](t),\ t \in \Pi. \tag{9}$$

Для каждого $c(\cdot) \in D$ линейный оператор $A_c[\cdot]$ действует как ограниченный оператор из $L_\infty(\Pi)$ в $L_\infty(\Pi)$. Очевидно, что для любого $H \in \mathcal{T}$ сужение $A_c[z]|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \backslash H,$ или, иначе говоря, при любом $c(\cdot) \in D$ оператор $A_c[\cdot]$ является вольтерровым на системе множеств $\mathcal{T}$. Этот оператор квазинильпотентен. Заменой (9) задача Коши (4),(5) приводится к эквивалентному ВФУ

$$z\,(t) = g(t, A_c[z](t)),\ t \in \Pi \tag{10}$$

над пространством $L_\infty\,(\Pi)$. Уравнение (10) принадлежит классу ВФУ вида (1), изученному в [10]. Из общей теоремы о достаточных УСГР таких уравнений (при возмущении оператора), доказанной в [10] (глава 1, §2, п.4), получаем следующие общие УСГР задачи Коши (4), (5).

Т е о р е м а. *Пусть управление $c_0(\cdot)$ принадле жит классу Ω и ему отвечает глобальное решение $x_0\,(\cdot)$ задачи* (4),(5). *Существуют $\delta > 0$ и $K > 0$ такие, что если управление $c(\cdot) \in D$ удовлетворяет неравенству $\|A_c - A_{c_0}\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)} < \delta,$ то это управление также принадлежит Ω и для отвечающего ему глобального решения $x\,(\cdot)$ задачи* (4),(5) *имеем* $\|x - x_0\|_{L_\infty(\Pi)} \leqslant K\,\|A_c - A_{c_0}\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)}\,.$

Конкретное применение теоремы требует оценки поведения $\|A_c - A_{c_0}\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)}$ при том или ином изменении $(c - c_0)$. Получить соответствующие конструктивные оценки позволяет, например, представление оператора $A_c,$ в виде

$$A_c[z](t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_c^k\,[G_c\,[z]]\,(t)\,,\ z(\cdot) \in L_\infty(\Pi),\ t \in \Pi, \tag{11}$$

где

$$G_c\,[z]\,(t) \equiv \int_{\Delta_c(t)} \left(\frac{z\,(\xi)}{2c\,(\xi_1)}\right) d\xi, z(\cdot) \in L_\infty(\Pi), t \in \Pi,$$

$$\Delta_c\,(t) \equiv \Big\{\xi \equiv \{\xi_1, \xi_2\} \in \mathbf{R}^2 : t_2 - \int_{\xi_1}^{t_1} c\,(\eta)\,d\eta \leqslant \xi_2 \leqslant t_2 + \int_{\xi_1}^{t_1} c\,(\eta)\,d\eta, 0 \leqslant \xi_1 \leqslant t_1\Big\}, t \in \Pi,$$

$$J_c\,[u]\,(t) = 2^{-1} \int_{\Delta_c(t)} \left(\frac{1}{c\,(\xi_1)}\right)' u'_{\xi_1}\,(\xi)\,d\xi, u(\cdot) \in W_\infty^1(\Pi),\ t \in \Pi.$$

Для любой функции $z(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$ ряд (11) сходится по норме пространства $W_\infty^1(\Pi)$.

Формула (11) позволяет показать, в частности, что при любом $c_0(\cdot) \in \Omega$ норма разности $\|A_c - A_{c_0}\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)}$ стремится к нулю, если стремится к нулю величина $\|c - c_0\|_{ac,\infty}$, где $\|c\|_{ac,\infty} \equiv \|c\|_{C[0,T_1]} + \|c'\|_{L_\infty[0,T_1]}$ — норма в пространстве абсолютно непрерывных на отрезке $[0, T_1]$ функций $c\,(\cdot)$ с ограниченной производной, которому принадлежит D. Из теоремы получаем следующие специальные УСГР задачи (4), (5) при возмущении управления.

С л е д с т в и е. *Пусть управление $c_0(\cdot)$ принадлежит классу Ω и ему отвечает глобальное решение $x_0\,(\cdot)$ задачи* (4), (5), *а ε — некоторое положительное число. Существует такое $\delta > 0,$ что если управление $c(\cdot) \in D$ удовлетворяет неравенству $\|c - c_0\|_{ac,\infty} < \delta,$ то это управление также принадлежит классу Ω и для отвечающего ему глобального решения $x\,(\cdot)$ задачи* (4), (5) *справедлива оценка* $\|x - x_0\|_{L_\infty(\Pi)} < \varepsilon.$

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука. 1987. 368 с.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука. 1979. 430 с.
3. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985. 224 с.
4. Плотников В. И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5. С. 845–856.
5. Матвеев А. С., Якубович В. А. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. № 5. С. 1109–1140.
6. Фурсиков А. В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье-Стокса и Эйлера // Матем. сб. 1981. Т. 115(157). № 2(6). С. 281–306.
7. Сумин В. И. Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький. ГГУ. 1975. 158 с.
8. Сумин В. И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
9. Сумин В. И. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2097–2109.
10. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 1992. 110 с.
11. Сумин В. И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 1998. Вып. 2(19). С. 138–151.
12. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25.
13. Чернов А. В. Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород. ННГУ. 2000. 177 с.
14. Сумин В. И., Чернов А. В. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2003. Вып. 1(26). С. 39–49.
15. Сумин В. И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник Нижегородского университета. Математика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2003. Вып. 1. С. 91–107.
16. Беляева О. А., Степанова О. А., Сумин В. И. О задаче Коши для полулинейного гиперболического уравнения второго порядка с управляемым старшим коэффициентом // Вестник Нижегородского университета. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2006. Вып. 2(31) (в печати).

Сумин Владимир Иосифович
Нижегородский государственный ун-т,
Россия, Нижний Новгород
e-mail: v_sumin@mail.ru