УДК 519.633.9

© **М. И. Сумин**

ДВОЙСТВЕННЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ[1]

Введение

Доклад посвящен изложению новых результатов, связанных с регуляризацией в задачах оптимизации и обратных задачах на основе теории двойственности [1] – [3]. В нем рассматривается параметрическая задача минимизаации

$$I_0(u) \to \inf,\ I_1(u) = q,\ u \in \mathcal{D}, \qquad q \in \mathcal{F} \text{ — параметр}, \tag{1}$$

в которой $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ — замкнутое множество, $I_0 : \mathcal{U} \to R^1$ — функционал, $I_1 : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ — оператор, $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ — гильбертовы пространства.

Развитие методов регуляризации на основе теории двойственности позволяет дополнить существующие методы регуляризации оптимизационных задач (см., например, [4]) методами, в которых самым существенным образом используется классическая идея «снятия» ограничений, заложенная в принципе Лагранжа. Известно, что двойственные численные алгоритмы являются одними из самых эффективных для решения оптимизационных задач с ограничениями [4], [5]. Их типичным представителем является классический алгоритм Удзавы (см., например, [5]), заключающийся в непосредственном решении на основе градиентной процедуры задачи, двойственной к исходной оптимизационной задаче. Вопросы его сходимости изучались ранее лишь при двух весьма ограничительных обстоятельствах, одно из которых заключается в предположении точного задания исходных данных оптимизационной задачи, а другое предполагает наличие седловой точки соответствующего функционала Лагранжа (см., в частности, [6], [7]). Формальное же применение алгоритма в его классической форме может приводить и приводит к стандартным эффектам неустойчивости приближенного решения. Простейший пример такой неустойчивости, связанный с задачей минимизации сильно выпуклой квадратичной функции двух переменных на множестве, задаваемом аффинным ограничением типа равенства, эквивалентной задаче поиска нормального решения линейной алгебраической системы двух уравнений с двумя неизвестными можно найти в [3]. Естественно, в случае когда в исходной задаче отсутствует седловая точка, то все классические теоремы сходимости [6], [7] теряют смысл, так как в них предполагается одновременная сходимость по прямой и двойственной переменным. Примеры задач, в которых для функционала Лагранжа $L(u,\lambda) \equiv I_0(u) + \langle \lambda, I_1(u) - q\rangle$ задачи (1) справедливо равенство

$$\sup_{\lambda \in H} \inf_{u \in \mathcal{D}} L(u,\lambda) = \inf_{z \in \mathcal{D}} \sup_{\lambda \in H} L(u,\lambda),$$

но внешний экстремум в левой части не достигается, могут быть найдены в [1], [2]. В этих примерах, первый из которых связан с обратной задачей финального наблюдения для параболического уравнения, а второй – с задачей решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, с соответствующими семействами зависящих от параметра q задач (1), всюду плотно во множестве всех значений параметра, для которых задача (1) разрешима, лежат как значения q, при которых функционал Лагранжа задачи (1) имеет седловую точку, так и значения, при которых функционал Лагранжа седловой точкой не имеет.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00460).

§ 1. Регуляризация на основе теории двойственности

Двойственная регуляризация для задачи минимизации (1) заключается в непосредственном решении возмущенной двойственной к (1) и регуляризованной по Тихонову задачи

$$V_q^\delta(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2 \to \sup, \;\; \lambda \in \mathcal{F}, \quad V_q^\delta(\lambda) \equiv \inf_{u\in\mathcal{D}} (I_0^\delta(u) + \langle \lambda, I_1^\delta(u) - q\rangle)$$

при согласованном с параметром регуляризации α стремлением к нулю ошибки задания исходных данных δ и конструктивном построении при этом минимизирующей в задаче (1) последовательности [1] – [3]. В зависимости от конкретного вида задачи (1) она может иметь смысл обратной задачи [1], уравнения первого рода в гильбертовом пространстве [2] или задачи оптимального управления [3].

§ 2. Итеративная регуляризация двойственного алгоритма

В докладе обсуждается процедура итеративной двойственной регуляризации [1] – [4] указанного двойственного алгоритма для задачи (1)

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \beta_k \partial V_q^{\delta_k}(\lambda^k) - 2\beta_k\alpha_k\lambda^k, \;\; k = 1, 2, \ldots; \;\; \lambda^1 \in \mathcal{F}, \tag{2}$$

в которой

$$\partial V_q^\delta(\lambda) = I_1^\delta(u^\delta[\lambda]) - q, \quad u^\delta[\lambda] \equiv \arg\min\{I_0^\delta(u) + \langle \lambda, I_1^\delta(u) - q\rangle : \, u \in \mathcal{D}\},$$

с целью конструирования сходящейся по аргументу минимизирующей последовательности в случае «линейно-выпуклой» задачи (1) с сильно выпуклым функционалом I_0. Показывается, что при согласованном стремлении к нулю ошибки δ_k, шагового множителя β_k и параметра регуляризации α_k имеет место сильная сходимость в метрике $\mathcal{U}$ приближенных решений $u^{\delta_k}[\lambda^k]$ к решению u_q^0 невозмущенной задачи (1) $I_0^0(u) \to \inf, \; I_1^0(u) = q, \; u \in \mathcal{D}$ вне зависимости от того, разрешима или нет, невозмущенная двойственная задача $V_q^0(\lambda) \to \sup, \;\; \lambda \in \mathcal{F}$. При этом множество значений параметра q, для которых эта двойственная задача разрешима плотно во множестве всех тех значений q, для которых разрешима невозмущенная задача (1). Обсуждается проблема останова итерационного процесса (2) при фиксированной конечной ошибке задания исходных данных, «качество» его сходимости в зависимости от дифференциальных свойств функции значений задачи (1) как функции параметра q. Рассматривается связь предлагаемого алгоритма с принципом максимума Понтрягина.

Список литературы

1. Сумин М. И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 11. С. 2001–2019.
2. Сумин М. И. Итеративная регуляризация градиентного двойственного метода для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Вестник Нижегородского университета. Серия Математика. 2004. Вып. 1(2). С. 192–208.
3. Сумин М. И. Регуляризованный двойственный алгоритм в задачах оптимального управления для распределенных систем // Вестник Нижегородского университета. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. 2006. Вып. 2(31) (в печати).
4. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002. 824 с.
5. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука. 1990. 488 с.
6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир. 1979. 400 с.
7. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир. 1979. 576 с.

Сумин Михаил Иосифович
Нижегородский государственный ун-т,
Россия, Нижний Новгород
e-mail: msumin@sinn.ru