УДК 517.91

© **А. В. Сурков**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СЛАБОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Введение

В работе рассматривается функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x_t(\cdot)), \quad x_{t_0}(\cdot) = \varphi_0(\cdot), \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R}^1 \times C_\tau \to \mathbb{R}^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, C_τ — пространство всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, $x_t(\cdot) \in C_\tau$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$, $\varphi_0(\cdot) \in C_\tau$ — начальная функция.

Исследуются вопросы слабой устойчивости и слабой асимптотической устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального включения (1), обосновывается аналог принципа инвариантности Ла-Салля в автономном случае с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова [1, с. 44]. Определения устойчивости и асимптотической устойчивости функционально-дифференциальных включений являются распространением соответствующих определений для функционально-дифференциальных уравнений (см. [2] и [3]). Понятия слабой асимптотической устойчивости (слабой устойчивости) являются сужением понятий асимптотической устойчивости (устойчивости) и возникают при исследовании вопросов устойчивости решений включений. Эти понятия для включени (1) вводятся аналогично соответствующим определениям для дифференциальных включений [4].

§ 1. Устойчивость и слабая устойчивость

Верхнюю $\dot{V}^*$ и нижнюю $\dot{V}_*$ производные функционала $V(t, x, \psi(\cdot))$ в силу дифференциального включения (1) определим следующими равенствами:

$$\dot{V}^* = \sup_{y \in F(t,\psi(\cdot))} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y \rangle + \partial_\psi V \right) \Big|_{x=\psi(0)}$$

$$\dot{V}_* = \inf_{y \in F(t,\psi(\cdot))} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V, y \rangle + \partial_\psi V \right) \Big|_{x=\psi(0)},$$

где $\nabla_x V$ — градиент функционала V по переменной x, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения, $\partial_\psi V$ — инвариантная производная в точке $\psi(\cdot) \in C_\tau$.

Л е м м а 1. *Если функционал $V(t, x, \psi(\cdot))$ инвариантно дифференцируем, то для любого решения $x(t)$ включения (1) функция $v(t) = V(t, x(t), x_t(\cdot))$ удовлетворяет неравенствам*

$$\dot{V}_*(t, x(t), x_t(\cdot)) \leqslant D_* v(t) \leqslant D^* v(t) \leqslant \dot{V}^*(t, x(t), x_t(\cdot)),$$

для любого $t \geqslant t_0$, где $D^* v(t)$ и $D_* v(t)$ — верхнее правое и нижнее правое производные числа Дини.

Пусть $I = [t_0, +\infty)$, $D \subset C_\tau$ — некоторая область содержащая нулевую функцию и

$$D[0] = \{x : x = \varphi(0), \varphi(\cdot) \in D\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть существует определенно-положительный, инвариантно дифференцируемый непрерывный функционал $V(t, x, \psi(\cdot))$ такой, что $\dot{V}^* \leqslant 0$ на множестве вида $I \times D[0] \times D$. Тогда тривиальное решение функционально-дифференциального включения (1) устойчиво.*

Если выполнены условия теоремы 1, но с заменой $\dot V^*$ на $\dot V_*$, и если частные производные $\partial V/\partial t$, $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$ непрерывны, то тривиальное решение функционально-дифференциального включени (1) слабо устойчиво.

Пусть $\omega(u) \geqslant 0$ — скалярная непрерывная неубывающа функция такая, что $\omega(0) = 0$ и $\omega(u) > 0$ при $u > 0$.

Т е о р е м а 2. *Пусть существует определенно-положительный, инвариантно дифференцируемый непрерывный функционал $V(t, x, \psi(\cdot))$, имеющий бесконечно малый высший предел, такой, что*

$$\dot V^*(t, \psi(0), \psi(\cdot)) \leqslant -\omega(\|\psi(\cdot)\|_C)$$

на множестве вида $I \times D[0] \times D$. Тогда тривиальное решение функционально-дифференциального включения (1) *асимптотически устойчиво.*

Если выполнены условия теоремы 2, но с заменой $\dot V^*$ на $\dot V_*$, и если частные производные $\partial V/\partial t$, $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$ непрерывны, то тривиальное решение функционально-дифференциального включени (1) слабо асимптотически устойчиво.

§ 2. Принцип инвариантности

Будем рассматривать автономное функционально-дифференциальное включение

$$\dot x(t) \in F(x_t(\cdot)), \quad x_0(\cdot) = \varphi_0(\cdot). \tag{2}$$

Обозначим через $\Omega(x(\cdot))$ ω-предельное множество для каждого решения $x(t)$ включения (2), то есть множество функций $\psi(\cdot) \in C_\tau$, для которых существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x_{t_n}(\cdot) \to \psi(\cdot)$. Через $E(\omega = 0)$ обозначим множество $\{\psi(\cdot) \in C_\tau : \omega(\|\psi(\cdot)\|_C) = 0)\}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $x(t)$ решение включения* (2), *для которого множество $\Omega(x(\cdot)) \in C_\tau$ непусто, компактно, полуинвариантно и существует непрерывный инвариантно дифференцируемый функционал $V(x, \psi(\cdot))$ такой, что*

$$\dot V^*(\psi(0), \psi(\cdot)) \leqslant -\omega(\|\psi(\cdot)\|_C),$$

где $\omega(u) \geqslant 0$ — некоторая непрерывная функция. Тогда

$$\Omega(x(\cdot)) \subset E(\omega = 0).$$

Отметим, что $\Omega(x(\cdot))$ непусто, компактно и полуинвариантно для любого решения $x(t)$ такого, что $x_t(\cdot) \in D$ для всех $t \geqslant 0$, если многозначное отображение F ограничено в D.

Список литературы

1. Ким А. В. i-Гладкий анализ и функционально дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
2. Колмановский В.Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Сурков Александр Владимирович
ИДСТУ СО РАН,
Россия, Иркутск
e-mail: surkov@dc.baikal.ru