УДК 517.929

© **Е. В. Ульянов**

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим линейное периодическое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\omega), \tag{1}$$

где $x:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\omega > 0$, A и B — ω-периодические кусочно непрерывные матричные функции, $\det B(t) \neq 0$ при $t \in [0,\omega]$.

У т в е р ж д е н и е 1 ([1,2]). *Для асимптотической устойчивости периодического дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом* (1) *необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии имели модули меньше единицы.*

Оператор монодромии действует в пространстве $C([-\omega,0],\mathbb{R}^n)$ и определяется формулой $(U\varphi)(\vartheta) = x(\omega+\vartheta,\varphi), \vartheta \in [-\omega,0]$, где $x(\omega+\bullet,\varphi)$ — отрезок решения системы (1), соответствующий начальному моменту $t_0 = 0$ и начальной функции $\varphi \in C([-\omega,0],\mathbb{R}^n)$ [2,3]. Значения оператора монодромии являются решениями начальной задачи Коши $x(0,\varphi) = \varphi(0)$ для уравнения

$$\frac{dx(\omega+\vartheta,\varphi)}{d\vartheta} = A(\vartheta)x(\omega+\vartheta,\varphi) + B(\vartheta)\varphi(\vartheta),\ \vartheta \in [-\omega,0].$$

Находя их, получим следующее представление оператора

$$(U\varphi)(\vartheta) = X(\vartheta)\varphi(0) + \int\limits_{-\omega}^{\vartheta} X(\vartheta)X^{-1}(s)B(s)\varphi(s)ds,\ \vartheta \in [-\omega,0], \tag{2}$$

где X $(X(-\omega) = I_n)$ — нормированная фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\vartheta} = A(\vartheta)x,\ \vartheta \in [-\omega,0]$$

Оператор монодромии U допускает продолжение по непрерывности из пространства $C([-\omega,0],\mathbb{R}^n)$ в гильбертово пространство $\mathbb{H}$ со следующим скалярным произведением

$$(\varphi,\psi) = \psi^*(0)\varphi(0) + \int\limits_{-\omega}^{0} \psi^*(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta.$$

Для продолженного оператора сохраняем обозначение U. Для него также сохраняется представление (2). Полученный оператор является вполне непрерывным и его спектр состоит из собственных чисел, а также может содержать точку $\rho = 0$.

Для оператора монодромии сопряженный оператор U^* будет также вполне непрерывным. Для него справедливо следующее представление

$$(U^*\psi)(0) = X^*(0)\psi(0) + \int\limits_{-\omega}^{0} X^*(s)\psi(s)ds, \tag{3}$$

$$(U^*\psi)(\vartheta) = B^*(\vartheta){X^*}^{-1}(\vartheta)\left[X^*(0)\psi(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} X^*(s)\psi(s)ds\right] \text{ при } -\omega \leqslant \vartheta < 0. \tag{4}$$

Введем оператор $H = (U^*U)^{1/2}$. Собственные числа оператора H называются сингулярными собственными числами оператора U [4].

У т в е р ж д е н и е 2. *Для асимптотической устойчивости уравнения* (1) *достаточно, чтобы все сингулярные числа оператора* U *были меньше единицы.*

Задачу нахождения ненулевых сингулярных чисел s оператора U можно свести к задаче нахождения условий, при которых система уравнений

$$U\varphi = s\psi,\ U^*\psi = s\varphi \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение.

С помощью формул (2), (3) и (4), определяющих представления операторов U и U^*, система (5) сводится к следующей системе уравнений

$$X(\vartheta)\left[\varphi(0) + \int\limits_{-\omega}^{\vartheta} X^{-1}(s)B(s)\varphi(s)ds\right] = s\psi(\vartheta),\ \vartheta \in [-\omega, 0],$$
$$B^*(\vartheta)X^{*-1}(\vartheta)\left[X^*(0)\psi(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} X^*(s)\psi(s)ds\right] = s\varphi(\vartheta),\ \vartheta \in [-\omega, 0),$$
$$X^*(0)\psi(0) + \int\limits_{-\omega}^{0} X^*(s)\psi(s)ds = s\varphi(0).$$

Полученная система уравнений была сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 1. *Ненулевые сингулярные собственные числа оператора монодромии* U *являются собственными числами следующей краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{\psi} = A(\vartheta)\psi + s^{-1}B(\vartheta)\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = \left(\dot{B}^*(\vartheta) - B^*(\vartheta)A^*(\vartheta)\right)B^{*-1}(\vartheta)\varphi - s^{-1}B^*(\vartheta)\psi,\ \vartheta \in [-\omega, 0),$$
$$B^{*-1}(-\omega)\varphi(-\omega) = s\psi(-\omega),$$
$$\psi(-0) = sB^{*-1}(0)\varphi(-0).$$

Список литературы

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, №3. С. 450-458.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
4. Гохберт И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1965.

Ульянов Евгений Валерьевич
Уральский государственный ун-т,
Россия, Екатеринбург
e-mail: Ulyanov.ev@rambler.ru