УДК 517.934

© **В. И. Ухоботов, С. А. Никитина**

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ИГРЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР[1]

Задан управляемый процесс

$$\dot z = -u - f_1(t,\theta,v), \quad \dot\theta = f_2(t,\theta,v), \quad z \in R^n, \quad \theta \in R^m, \quad t \leqslant p.$$

Здесь u — управление первого игрока, а v — управление второго игрока. На их выбор накладываются геометрические ограничения

$$u \in U(\alpha(t)) \subset R^n, \quad v(t) \in V \subset R^{m_1},$$

где многогранник $A(y)$ задается системой линейных неравенств с помощью фиксированного набора векторов $x_j \in R^n$, $j \in \overline{1,l}$ ($\langle x, z\rangle$ — скалярное произведение векторов x, $z \in R^n$)

$$A(y) = \left\{ z \in R^n : \langle x_j, z\rangle \leqslant y_j, \quad j \in \overline{1,l} \right\}. \tag{1}$$

Множество векторов $y \in R^l$, для каждого из которых $A(y) \neq \emptyset$ обозначим K. Считаем, что при всех $y \in K$, многогранник (1) является ограниченным. Обозначим

$$\Lambda = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in R^l : \ \lambda_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,l}, \quad \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{l} \lambda_j x_j = 0 \right\}.$$

Тогда из условия ограниченности многогранника (1) следует ([1], теорема IV.1.14), что множество $\Lambda \neq \emptyset$ и

$$K = \left\{ y \in R^l : \quad \min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=1}^{l} \lambda_j y_j \geqslant 0 \right\}.$$

П р е д п о л о ж е н и е 1. Для всех $y, y^* \in K$ выполнено [2]

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*).$$

П р е д п о л о ж е н и е 2. Для любого начального условия $t_0 < p$, $\theta_0 \in R^m$ и для любой измеримой функции $v : [t_0, p] \to V$ задача Коши

$$\dot\theta = f_2(t, \theta, v(t)), \quad \theta(t_0) = \theta_0$$

имеет единственное решение $\theta(t) = \psi(t; t_0, \theta_0, v(\cdot))$, определенное на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant p$.

Плата задается

$$f(z(p)) = \max_{1 \leqslant j \leqslant l} \langle x_j, z(p)\rangle.$$

Первый игрок максимизирует, а второй минимизирует значение $f(z(p))$.

Обозначим при $t \leqslant p$, $j \in \overline{1,l}$, $\theta \in R^m$

$$T_t^{(j)}(\theta) = \inf_{v(\cdot)} \left(\int_t^p \langle x_j, f_1(r, \psi(r; t, \theta, v(\cdot)), v(r))\rangle dr \right).$$

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 05-02-85203 а/У).

Тогда значение $G(t_0, z_0, \theta_0)$ функции цены игры в начальной позиции $t_0 \leqslant p$, $z_0 \in R^n$, $\theta_0 \in R^m$ равно

$$G(t_0, z_0, \theta_0) = \max\left\{0; \max_{t_0 \leqslant s \leqslant p} \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \left(\int_s^p \alpha_j(r)dr - T_s^{(j)}(\theta_0)\right);\right.$$

$$\left.\max_{1 \leqslant j \leqslant l}\left(\langle x_j, z_0\rangle - T_{t_0}^{(j)}(\theta_0) - \int_{t_0}^{p} \alpha_j(r)dr\right)\right\}.$$

В качестве примера рассмотрена следующая задача. На плоскости с координатами ς и η движется материальная точка под действием управляемой ограниченной силы

$$\ddot{\varsigma}_1 = P_1, \quad \ddot{\eta}_1 = P_2, \quad |P_i| \leqslant a_i, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Цель выбора управляемой силы $P = (P_1, P_2)$ заключается в том, чтобы в заданный момент времени $p > 0$ осуществить встречу с автомобилем [3]

$$\dot{\varsigma}_2 = b\cos\theta, \quad \dot{\eta}_2 = b\sin\theta, \quad \dot{\theta} = cv, \quad |v| \leqslant 1. \tag{3}$$

Перейдем к новым переменным

$$z_1 = -\varsigma_2 + \varsigma_1 + (p-t)\dot{\varsigma}_1, \quad z_2 = -\eta_2 + \eta_1 + (p-t)\dot{\eta}_1$$

и к новому управлению

$$u_1 = -(p-t)P_1, u_2 = -(p-t)P_2.$$

В этих переменных уравнения движения (2) и (3) примут вид

$$\dot{z}_1 = -u_1 - b\cos\theta, \quad \dot{z}_2 = -u_2 - b\sin\theta, \quad \dot{\theta} = cv, \quad |v| \leqslant 1.$$

Плата $f(z(p)) = \max\Big\{|\varsigma_2(p) - \varsigma_1(p)|\,;\ |\eta_2(p) - \eta_1(p)|\Big\}$.

Значение функции цены игры имеет вид

$$G(t_0, z_0, t_0) = \max\left\{0; z_1(t_0) - T_{t_0}^{(1)}(\theta_0) - \frac{\alpha_1(p-t_0)^2}{2};\ -z_1(t_0) - T_{t_0}^{(2)}(\theta_0) - \frac{\alpha_1(p-t_0)^2}{2};\right.$$

$$z_2(t_0) - T_{t_0}^{(3)}(\theta_0) - \frac{\alpha_2(p-t_0)^2}{2}; -z_2(t_0) - T_{t_0}^{(4)}(\theta_0) - \frac{\alpha_2(p-t_0)^2}{2};$$

$$\left.\max_{t_0 \leqslant s \leqslant p}\left(\frac{\alpha_1(p-s)^2}{2} - T_s^{(1)}(\theta_0);\ \frac{\alpha_1(p-s)^2}{2} - T_s^{(2)}(\theta_0);\ \frac{\alpha_2(p-s)^2}{2} - T_s^{(3)}(\theta_0);\ \frac{\alpha_2(p-s)^2}{2} - T_s^{(4)}(\theta_0)\right\}\right.,$$

где

$$T_t^{(j)}(\theta) = \begin{cases} \frac{b}{c}\sin|\theta - \beta_j| + \frac{b}{c}(cp - |\theta-\beta_j| - ct), & \text{при } \frac{|\theta-\beta_j|}{c} + t \leqslant p \\ \frac{b}{c}\sin|\theta-\beta_j| - \frac{b}{c}\sin(ct + |\theta-\beta_j| - cp), & \text{при } \frac{|\theta-\beta_j|}{c} + t > p \end{cases},$$

а β принимает, соответственно, значения $0; \pi; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$.

Список литературы

1. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
2. Ухоботов В. И. Построение цены игры в некоторых дифференциальных играх с фиксированным временем // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, Вып. 6. С. 994–1000.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1984. 479 с.

Ухоботов Виктор Иванович
Челябинский государственный ун-т,
Россия, Челябинск
e-mail: ukh@csu.ru

Никитина Светлана Анатольевна
Челябинский государственный ун-т,
Россия, Челябинск
e-mail: nikitina@csu.ru