УДК 517.934

© С. В. Чистяков

ОПЕРАТОРЫ ЗНАЧЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

При исследования нерегулярных дифференциальных игр [1–4] возникли функциональные уравнения [5–9], которые обобщают основное уравнение Айзекса [10,11] на случай негладкой функции значения игры (функции Беллмана или потенциала игры). На их основе в компактной форме может быть построена теория дифференциальных игр [12–14], охватывающая исследование вопросов существования и структуры решения антагонистических и бескоалиционных дифференциальных игр, обоснования уравнения Айзекса и известных условий регулярности. Элементы этой теории для позиционной дифференциальной игры сближения в заданный момент времени и освещаются ниже.

Рассмотрим следующую позиционную дифференциальную игру [2]:

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) \tag{1}$$

$$(t \in R,\ x \in R^n,\ u \in P \in \mathrm{Comp}R^k,\ v \in Q \in \mathrm{Comp}R^l),$$

$$x(t_*) = x_*, \tag{2}$$

$$H\big(x(T)\big) \to \max_{(v)} \min_{(u)} / \min_{(u)} \max_{(v)} \tag{3}$$

$$(H \in C(R^n),\ T \geqslant t_*)$$

Предполагается, что в ней 1-ый игрок распоряжается управлением v, а 2-ой — управлением u, при этом в каждый момент времени оба игрока знают текущую позицию $\big(t, x(t)\big)$. Относительно правой части системы (1) считаются выполненными условия, включая и условие седловой точки в маленькой игре, сформулированные в [2].

Пусть $D(t_*, x_*, T) \subset R \times R^n$ — отрезок интегральной воронки системы (1) на сегменте $[t_*, T]$, исходящей из позиции (t_*, x_*), $D \subset (-\infty, T] \times R^n$ — произвольное непустое ограниченное множество такое, что $((t_*, x_*) \in D) \Rightarrow (D(t_*, x_*, T) \subset D)$, а $M(D)$ — пространство ограниченных функций $w : D \to R$, наделенное равномерной метрикой $\rho:\ \rho(w'(\cdot), w''(\cdot)) = \sup_{(t,x)\in D} |w'(t,x) - w''(t,x)|$, и отношением частичного порядка $\geqslant$: $w'(\cdot) \geqslant w''(\cdot)$, если $w'(t,x) \geqslant w''(t,x),\ \forall (t,x) \in D$ (здесь $w'(\cdot), w''(\cdot) \in M(D)$). Указанное выше множество D будем называть пространством позиций.

Определим операторы $\Phi_-, \Phi_+ : M(D) \to M(D)$, полагая, что для любой функции $w(\cdot) \in M(D)$ значения $\Phi_- \circ w(t_*, x_*)$ и $\Phi_+ \circ w(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in D$, ее образов $\Phi_- \circ w(\cdot)$ и $\Phi_+ \circ w(\cdot)$ при отображениях Φ_- и Φ_+ находятся, соответственно по следующим правилам:

$$\Phi_- \circ w(t_*, x_*) = \sup_{t\in[t_*,T]} \sup_{v\in Q} \inf_{u(\cdot)} w\Big(t, x\big(t, t_*, x_*, u(\cdot), v\big)\Big)$$

и

$$\Phi_+ \circ w(t_*, x_*) = \inf_{t\in[t_*,T]} \inf_{u\in P} \sup_{v(\cdot)} w\Big(t, x\big(t, t_*, x_*, u, v(\cdot)\big)\Big),$$

где внутренние операции inf и sup берутся, соответственно, по всем допустимым измеримым по Лебегу программным управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. Нетрудно убедиться, что операторы Φ_- и Φ_+ определены корректно, в частности, отображают пространство $M(D)$ в себя.

Л е м м а 1. *Для любой функции* $w(\cdot) \in M(D)$

$$\Phi_- \circ w(\cdot) \geqslant w(\cdot),\ \text{а}\ \Phi_+ \circ w(\cdot) \leqslant w(\cdot).$$

Л е м м а 2. *Операторы* Φ_- *и* Φ_+ *сохраняют порядок, то есть*

$$\Phi_- \circ w'(\cdot) \geqslant \Phi_- \circ w''(\cdot) \text{ и } \Phi_+ \circ w'(\cdot) \geqslant \Phi_+ \circ w''(\cdot),$$

если $w'(\cdot) \geqslant w''(\cdot)$ $(w'(\cdot), w''(\cdot) \in M(D))$.

Пусть $UC(D)$ и $Lip(D)$ — подпространства пространства $M(D)$, образованные, соответственно, всеми равномерно непрерывными и липшицевыми на множестве D функциями $w(\cdot) \in M(D)$.

Т е о р е м а 1. *Подпространства* $UC(D)$ *и* $Lip(D)$ *инвариантны относительно операторов* Φ_- *и* Φ_+ .

Т е о р е м а 2. *Операторы* Φ_- *и* Φ_+ *непрервны на пространстве* $UC(D)$ *. Более того, на нем они удовлетворяют условию Липшица с постоянной* $L = 1$ *и не являются сжимающими.*

Т е о р е м а 3. *При любом начальном приближении из подпространства* $UC(D)$ *последовательные приближения решения уравнения*

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = w(\cdot) \tag{4}$$

и, аналогично, уравнения

$$\Phi_+ \circ w(\cdot) = w(\cdot) \tag{5}$$

сходятся равномерно на множестве D *к решению этого уравнения, причем соответствующее решение принадлежит подпространству* $UC(D)$ *, а если начальное приближение принадлежит подпространству* $Lip(D)$ *, то это решение также принадлежит подпространству* $Lip(D)$ *.*

Т е о р е м а 4. *На пространстве* $UC(D)$ *система из двух уравнений* (4) *и* (5) *равносильна уравнению*

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = \Phi_+ \circ w(\cdot). \tag{6}$$

Т е о р е м а 5. *На подпространстве* $C^1(D) \cap UC(D)$ *уравнение* (6) *равносильно уравнению Айзекса*

$$\max_{v\in Q} \min_{u\in P} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x}(t,x), f(t,x,u,v) \right\rangle + \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = 0.$$

Рассмотрим последовательные приближения

$$w_-^{(n)}(\cdot) = \Phi_- \circ w_-^{(n-1)}(\cdot) \tag{7}$$

и

$$w_+^{(n)}(\cdot) = \Phi_+ \circ w_+^{(n-1)}(\cdot) \tag{8}$$

(n=1,2,. . .), соответственно решений уравнений (4) и (5) с начальными приближениями

$$w_-^{(0)}(t_*, x_*) = \max_{v\in Q} \inf_{u(\cdot)} H\Big(x\big(T, t_*, x_*, u(\cdot), v\big)\Big) \tag{9}$$

и

$$w_+^{(0)}(t_*, x_*) = \min_{u\in P} \inf_{v(\cdot)} H\Big(x\big(T, t_*, x_*, u, v(\cdot)\big)\Big). \tag{10}$$

Л е м м а 3. $w_-^{(0)}(\cdot), w_+^{(0)}(\cdot) \in UC(D).$

Л е м м а 4. *Для любого* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Phi_+ \circ w_-^{(n)}(\cdot) = w_-^{(n)}(\cdot), \text{ а } \Phi_- \circ w_+^{(n)}(\cdot) = w_+^{(n)}(\cdot).$$

Т е о р е м а 6. *На подпространстве* $UC(D)$ *уравнение* (6) *имеет единственное решение, удовлетворяющее краевому условию*

$$w(t,x)\mid_{t=T} = H(x). \tag{11}$$

С л е д с т в и е. *Единственным решением уравнения* (6) *с краевым условием* (11) *является функция значения семейства игр* (1)–(3), $(t_*, x_*) \in D$, *при этом и последовательные приближения* (7), (9), *и последовательные приближения* (8), (10), *сходятся равномерно на множестве* D *к этой функции.*

При выполнении известного условия регулярности в линейной игре сближения в заданный момент времени [2] легко проверить, что функция программного максимина, очевидно, удовлетворяющая условию (11), является неподвижной точкой каждого из операторов Φ_- и Φ_+. Поэтому в этой игре она является функцией значения.

Опишем возможную структуру решения игры (1)–(3) в классе позиционных стратегий за одного из игроков. Для определенности опишем ее за 1-го игрока. Учитывая определение оператора Φ_-, лемму 3 и теорему 1 запишем равенство (7) в явном виде:

$$w_-^{(n)}(t_*, x_*) = \max_{t \in [t_*, T]} \max_{v \in Q} \inf_{u(\cdot)} w_-^{(n-1)}\Big(t, x\big(t, t_*, x_*, u(\cdot), v\big)\Big) \tag{12}$$

$$((t_*, x_*) \in D)$$

Рассмотрим последовательность $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ позиционных стратегий 1-го игрока, считая, что в ней стратегия V_0 каждой позиции $(t_*, x_*) \in D$ ставит в соответствие один из векторов, реализующих максимум по $v \in Q$ правой части (9), а каждая из стратегий V_n, $n \in \mathrm{N}$, всякой такой позиции ставит в соответствие один из векторов, реализующих максимум по $v \in Q$ в правой части (12).

Пусть $\alpha > 0$, $n \in \mathrm{N}$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $n > k$,

$$D_{nk}(\alpha) = \{(t,x) \in D \mid w_-^{(n)}(t,x) \geqslant w_-^{(k)}(t,x) + \alpha(n-k)\},$$

$$cD_{nk}(\alpha) = D \setminus D_{nk}(\alpha),$$

и далее пусть

$$\Sigma_n(\alpha) = \{B_{nn}(\alpha), B_{nn-1}(\alpha), \ldots, B_{n0}(\alpha)\},$$

где

$$B_{nn}(\alpha) = \bigcap_{l=0}^{n-1} D_{nl}(\alpha),$$

$$B_{nk}(\alpha) = \left(\bigcap_{l=k+1}^{n} cD_{lk}(\alpha)\right) \bigcap \left(\bigcap_{l=0}^{k-1} D_{kl}(\alpha)\right), \ 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$B_{n0}(\alpha) = \bigcap_{l=1}^{n} cD_{l0}(\alpha).$$

Л е м м а 5. *При любых* $\alpha > 0$ *и* $n \in \mathrm{N}$ *система множеств* $\Sigma_n(\alpha)$ *образует разбиение пространства позиций* D.

Таким образом, для любых $\alpha > 0$ и $n \in \mathrm{N}$ на множестве D можно определить позиционную стратегию 1-го игрока $V_{n\alpha}$, считая, что если $(t_*, x_*) \in B_{nk}(\alpha)$, то

$$V_{n\alpha}(t, x) = V_k(t, x).$$

Будем говорить ниже, что семейство игр (1)–(3), $(t_*, x_* \in D)$, имеет универсальное решение, если при любом $\varepsilon > 0$ каждый из игроков имеет на пространстве позиций D универсальную ε-оптимальную стратегию.

Т е о р е м а 7. *Каково бы ни было ограниченное пространство позиций D семейство игр (1)–(3), $(t_*, x_*) \in D$, имеет универсальное решение, при этом, в частности, если $\varepsilon > 0$, то при любых $n \in \mathrm{N}$ и $\alpha > 0$ таких, что $\rho\big(w_-^{(n)}(\cdot), w_+^{(n)}\big) < \varepsilon/2$ и $\alpha < \varepsilon/2n$, стратегия $V_{n\alpha}$ является универсальной на множестве D ε-оптимальной стратегией 1-го игрока.*

Аналогично конструируются универсальные ε-оптимальные позиционные стратегии 2-го игрока.

Основы теории бескоалиционных дифференциальных игр, опирающейся на описанные выше результаты, кратко изложены в [12].

Список литературы

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука. 1970. 420 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.:Наука. 1974. 456 с.
3. Ченцов А. Г. Об одном примере нерегулярной дифференциальной игры // ПММ. 1976. Т. 40. № 6. С. 1113–1116.
4. Чистяков С. В. Одна дифференциальная игра при фазовых ограничениях // Всесоюзная конференция по оптимальному управлению в механических системах. Тезисы докладов. М. 1974. С. 70–71.
5. Ченцов А. Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
6. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99. № 3. С. 394–420.
7. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 287 с.
8. Чистяков С. В., Петросян Л. А. Об одном подходе к решению игр преследования // Вестник ЛГУ (сер. мат., мех., астр.). 1977. № 1. вып. 1. С. 77–82.
9. Чистяков С. В. К решению игровых задач преследования // ПММ. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
10. Чистяков С. В. О функциональных уравнениях в играх сближения в заданный момент времени // ПММ. 1982. Т. 46. № 5. С. 874–877.
11. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967. 479 с.
12. Чистяков С. В. О бескоалиционных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259. № 5. С. 1052–1055.
13. Чистяков С. В. Программные итерации и универсальные ε-оптимальные стратегии в позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 6. С. 1333–1336.
14. Чистяков С. В. Операторы значения антагонистических дифференциальных игр. СПб.: НИИ Химии СПбГУ. 1999. 62 с.

Чистяков Сергей Владимирович
Санкт-Петербургский государственный ун-т,
Россия, Санкт-Петербург
e-mail: svch50@mail.ru