Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ѓ1(24)

УДК 517.977

© **А.Г. Иванов**
imi@uni.udm.ru

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗАДАЧ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. I[1]

Ключевые слова: почти периодические функции в смысле Бора и Степанова, аппроксимация мерозначных почти периодических отображений, игольчатая вариация.

Abstract. The main definitions and statements on the measurevalued functions almost periodic in the sense of Stepanov, which are used while studing the problems of almost periodic motions optimal control, are prezented.

Содержание

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99–01–00454) и Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант E00–1.0–5).

Введение

Задача оптимального управления почти периодическими (п. п.) движениями (кратко говорим ґзадача $(\mathfrak{z}_{ap})$Є) является естественным обобщением задачи управления периодическими движениями (пишем ґзадача $(\mathfrak{z}_p)$Є). На целесообразность изучения задачи $(\mathfrak{z}_{ap})$ как задачи, представляющей интерес в приложениях, связанных с оптимизацией колебательных процессов ряда физических систем, теорией магистральных процессов, указано, например, в [1–7]. Отметим, что задаче $(\mathfrak{z}_p)$, в отличие от задачи $(\mathfrak{z}_{ap})$, в последние десятилетия, начиная, по-видимому, с работы [8], содержащей точную математическую постановку такой задачи и описывающей работу химического реактора, посвящено большое количество публикаций (см., например, [1–27] и приведенную там библиографию, предисловие и комментарии), в которых указаны необходимые, необходимые и достаточные условия оптимальности, исследуется качественное поведение периодических движений и разобрано значительное количество реальных примеров. Вместе с тем, например, в [27–29] обращается внимание на задачи периодической оптимизации, в которых нижняя грань целевого функционала, заданного на множестве D_p допустимых периодических процессов, не достигается, а достигается на допустимом п. п. процессе задачи $(\mathfrak{z}_{ap})$, отвечающей исходной задаче $(\mathfrak{z}_p)$, либо вообще расширение множества D_p до множества п. п. процессов улучшает значение целевого функционала задачи $(\mathfrak{z}_p)$. В обоих случаях будем говорить, что расширение задачи $(\mathfrak{z}_p)$ до задачи $(\mathfrak{z}_{ap})$ является эффективным. Продемонстрируем сказанное на примере системы

$$\dot{x} = Ax - p(t), \ t \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

с блочно-диагональной матрицей $A = \mathrm{diag}[A_1, A_2]$, у которой собственные значения матриц $A_1, A_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ равны соответственно, $\alpha \pm i\beta_1$ и $\alpha \pm i\beta_2$, где $\alpha > 0$ $(i^2 = -1)$ и числа β_1, β_2 несоизмеримы. В качестве $p(t) \in \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$ берем конечный тригонометрический полином, удовлетворяющий условию $M\{p^*(t)p(t)\} \leqslant 1$. Совокупность всех таких полиномов обозначим через $\mathfrak{P}$. Выделим также его подмножество $\mathbb{P}$, состоящее из периодических (всевозможных периодов) тригонометрических полиномов. Отметим, что система (0.1) описывает динамику двух линейных осцилляторов с собственными частотами β_1, β_2 и параметром, характеризующим потери (трение, сопротивление и т.п.) с гармоническим внешним воздействием $p(\cdot) \in \mathfrak{P}$. Качественное поведение решений таких систем хорошо известно. В частности, каждому $p(\cdot)$ отвечает единственное решение $x(t) = x(t; p(\cdot))$, $t \in \mathbb{R}$, которое будет периодическим, если $p(\cdot) \in \mathbb{P}$, и будет п. п. по Бору, если $p(\cdot)$ содержит, по крайней мере, две несоизмеримые частоты. Стало быть, на $\mathfrak{P}$ корректно определен функционал [30]

$$I(x(\cdot), p(\cdot)) \doteq M\{x^*(t)x(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^*(t)x(t)dt, \tag{0.2}$$

где $x(t) = x(t; p(\cdot))$. Рассмотрим задачу $I(x(\cdot), p(\cdot)) \to \sup$, $p(\cdot) \in \mathfrak{P}$. Подчеркнем, что это задача п. п. оптимизации, поскольку в качестве управлений рассматриваются тригонометрические полиномы $p(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j \cos \beta_j t + b_j \sin \beta_j t$, $N \in \mathbb{N}$, в которых

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 + |b_j|^2 \leqslant 2, \tag{0.3}$$

и относительно частот $0 \leqslant \omega_1 < \ldots < \omega_N$, вообще говоря, не предполагается их соизмеримость. Кроме того, она является расширением периодической (с нефиксированным периодом) задачи $I(p(\cdot), x(\cdot)) \to \sup$, $p(\cdot) \in \mathbb{P}$, поскольку здесь в качестве управлений берутся уже всевозможные T-периодические полиномы $p(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j \cos \frac{2\pi j}{T} t + b_j \sin \frac{2\pi j}{T} t$, $N \in \mathbb{N}$, в которых a_j, b_j удовлетворяют неравенству (0.3). Используя вид решения системы (0.1), отвечающего $p(\cdot) \in \mathfrak{P}$ [30. С. 425], получим, что при каждом $p(\cdot) \in \mathfrak{P}$ имеет место равенство

$$I(x(\cdot), p(\cdot)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} c_j^* \mathcal{R}^*(\omega_j) \mathcal{R}(\omega_j) c_j, \tag{0.4}$$

где $c_j = a_j - ib_j$, $\mathcal{R}(\omega_j) = \mathrm{diag}[\mathcal{R}_1(\omega_j)\mathcal{R}_2(\omega_j)]$, и где, в свою очередь, $\mathcal{R}_l(\omega_j) \doteq (A_l - i\omega_j E)^{-1}$. Далее, поскольку

$$\begin{cases} |\mathcal{R}_l(\omega)|^2 < \alpha^{-2}, \text{ если } \omega \neq \beta_l, \\ |\mathcal{R}_l(\omega)|^2 = \alpha^{-2}, \text{ если } \omega = \beta_l, \end{cases} \tag{0.5}$$

то из (0.3) и (0.4) можно заключить, что максимальное значение α^{-2} данной задачи достигается на полиноме

$$\widehat{p}(t) = \mathrm{col}(\cos\beta_1 t, \, -\sin\beta_1 t, \, \cos\beta_2 t, \, -\sin\beta_2 t), \tag{0.6}$$

который, в силу несоизмеримости β_1 и β_2, является п. п. по Бору функцией. Кроме того, для каждого $p(\cdot) \in \mathbb{P}$ выполнено неравенство $I(\widehat{x}(\cdot), \widehat{p}(\cdot)) > I(x(\cdot), p(\cdot))$, т. е. расширение множества $\mathbb{P}$ в задаче $I(x(\cdot), p(\cdot)) \to \sup$, $p(\cdot) \in \mathbb{P}$ до $\mathfrak{P}$ является эффективным. Отметим, что данное обстоятельство естественно с физической точки зрения.

Используя вышесказанное, приведем пример задачи оптимального управления периодическими движениями, в которой расширение периодических управлений до п. п. эффективно. Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax - u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с матрицей $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$, что и в системе (0.1), а в качестве $u(t)$ берем измеримые периодические функции со значениями в $O_2^4[0] \doteq \{x \in \mathbb{R}^4 \colon |x|^2 \leqslant 2\}$, и совокупность таких функций (допустимых периодических управлений) обозначим $\mathcal{U}_p$. Как уже отмечалось, каждому $u(\cdot) \in \mathcal{U}_p$ отвечает единственное периодическое (того же самого периода, что и $u(\cdot)$) решение $x(\cdot) = (x_1(\cdot) \ldots x_4(\cdot))$ данной системы управления. Тем самым на $\mathcal{U}_p$ корректно определен функционал

$$u(\cdot) \mapsto J(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq \frac{1}{2} M\{(x_1(t) + \ldots + x_4(t))^2\} \tag{0.7}$$

(напомним, что для всякой T-периодической функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $M\{f(t)\} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$). Рассмотрим задачу периодической оптимизации $J(x(\cdot),u(\cdot))\to\sup$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}_p$. Поскольку $\mathcal{U}_p$ является подмножеством множества $S(\mathbb{R},O_2^4[0])$ п. п. по Степанову функций [31;32] $u:\ \mathbb{R}\to O_2^4[0]$, то расширением этой задачи будет следующая задача:

$$J(x(\cdot),u(\cdot))\to\sup,\ u(\cdot)\in S(\mathbb{R},O_2^4[0]), \tag{0.8}$$

в которой (см. (0.7)) $x(t)=(x_1(t)\dots x_4(t))$ — уже п. п. по Бору решение системы $\dot{x}=Ax-u(t)$, $t\in\mathbb{R}$, отвечающее управлению $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},O_2^4[0])$. Поскольку $S(\mathbb{R},O_2^4[0])$ содержится в множестве $\mathbb{S}$, состоящем из ограниченных на $\mathbb{R}$ п. п. по Степанову функций $u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$, для которых $M\{u^*(t)u(t)\}\leqslant 2$, то

$$\iota_1\leqslant\sup\{J(x(\cdot),u(\cdot)),\ u(\cdot)\in S(\mathbb{R},O_2^4[0])\}\leqslant\iota_2, \tag{0.9}$$

где $\iota_1\doteq\sup\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_p}J(x(\cdot),u(\cdot))$, а $\iota_2\doteq\sup\limits_{u(\cdot)\in\mathbb{S}}J(x(\cdot),u(\cdot))$. Далее, т. к. (см. (0.2)) $\iota_2\leqslant\sup\limits_{u(\cdot)\in\mathbb{S}}I(x(\cdot),u(\cdot))\doteq\iota_3$ и (здесь см. [29]) $\iota_3=\sup\limits_{u(\cdot)\in\mathfrak{P}}I(x(\cdot),u(\cdot))$, а решением задачи $I(x(\cdot),u(\cdot))\to\sup$, $u(\cdot)\in\mathfrak{P}$, как показано выше, является п. п. по Бору функция $\widehat{u}(\cdot)=\widehat{p}(\cdot)$ (см. (0.6)), принадлежащая, конечно, $S(\mathbb{R},O_2^4[0])$, то (см. (0.9)) эта функция будет решением задачи (0.8). При этом $J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))=\alpha^{-2}$. Теперь покажем, что для всех $u(\cdot)\in\mathcal{U}_p$ $J(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))<\alpha^{-2}$. Допустим противное, т. е. предположим, что найдется $\tilde{T}$-периодическое управление $\tilde{u}(\cdot)$ из $\mathcal{U}_p$ такое, что $\iota_1=J(\tilde{x}(\cdot),\tilde{u}(\cdot))=\alpha^{-2}$. С другой стороны, пусть $\mathbb{P}_4$ — совокупность $\tilde{T}$-периодических полиномов $p(t)=\sum\limits_{j=1}^4 a_j\cos\frac{2\pi j}{\tilde{T}}t+b_j\sin\frac{2\pi j}{\tilde{T}}t$, принадлежащих $\mathbb{P}$, т. е. в которых совокупность пар $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^4$ удовлетворяет неравенству (0.3) при $N=4$. Ясно, что такая совокупность пар K_4 является компактным множеством. Далее, т. к. $\mathbb{P}_4 \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{S}$ и (см. [29]) $J(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = \sup\limits_{p(\cdot)\in\mathbb{P}_4} I(x(\cdot), p(\cdot)) \doteq \iota_4$, то из (0.9) получаем равенство $\iota_4 = \alpha^{-2}$, из которого, в силу компактности множества K_4 и непрерывности отображения

$$p(\cdot) \mapsto I(x(\cdot), p(\cdot)), \ p(\cdot) \in \mathbb{P}_4$$

(см. (0.4) при $N = 4$ и $\omega_j = \frac{2\pi j}{\tilde{T}}$), вытекает существование такого полинома $\tilde{p}(t) = \sum\limits_{j=1}^{4} \tilde{a}_j \cos \frac{2\pi j}{\tilde{T}} t + \tilde{b}_j \sin \frac{2\pi j}{\tilde{T}} t$, принадлежащего множеству $\mathbb{P}_4$, что $I(\tilde{x}(\cdot), \tilde{p}(\cdot)) = \alpha^{-2}$. Последнее, в силу (0.5), невозможно. Полученное противоречие показывает, что задача (0.8) действительно является эффективным расширением периодической задачи $J(x(\cdot), u(\cdot)) \to \sup$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_p$.

Задача (0.8) содержится в следующей задаче:

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = M\{f_0(x(t), u(t))\} \to \inf, \ (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{D}, \qquad (0.10)$$

определенной на множестве $\mathbb{D} \subset B(\mathbb{R}, G) \times S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ (G — область в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$) , состоящем из пар $(x(\cdot), u(\cdot))$, в которых п. п. по Бору функция $x\colon \mathbb{R} \to G$ является решением системы

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \qquad (0.11)$$

отвечающим п. п. по Степанову управлению $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$ и $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$. Эта задача является расширением следующей задачи периодической оптимизации:

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) \to \inf, \quad (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{D}_p, \qquad (0.12)$$

определенной на множестве $\mathbb{D}_p$ — всевозможных периодических пар $(x(\cdot), u(\cdot))$, в которых $x(\cdot)$ — периодическое решение системы (0.11), отвечающее управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}_p$, где $\mathcal{U}_p$ — множество измеримых периодических функций $u\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$.

Заметим, что если в последней задаче вопросов, связанных с корректностью ее постановки, нет, ибо для каждой T-периодической пары $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{D}_p$ отображение $t \mapsto f_0(x(t), u(t))$

(мы предполагаем, что функции f_0 и f непрерывны $G \times \mathfrak{U}$) является T-периодической ограниченной измеримой функцией, а значит, существует среднее

$$M\{f_0(x(t), u(t))\} = \frac{1}{T} \int_0^T f_0(x(t), u(t))dt.$$

При расширении же множества $\mathbb{D}_p$ до $\mathbb{D}$ вопрос о существовании среднего значения функции $t \mapsto f_0(x(t), u(t))$ требует, вообще говоря, доказательства, т. к. предполагается, что $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$. Во втором разделе работы будет доказано, что для всякой пары $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{D}$ эта функция будет п. п. по Степанову и, стало быть, задача (0.10) поставлена корректно. Сейчас, на примере этой задачи, выделим ряд моментов, присущих также и задачам оптимального управления п. п. движениями в более общей постановке (см., например, [33]), которые отличают ее от задачи (0.12). Так, если для получения необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для $\widehat{T}$-периодического процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathbb{D}_p$ задачи (0.12) достаточно использовать на $[0, \widehat{T}]$ известную игольчатую вариацию $u(\cdot, \vartheta, \varepsilon)$ для $\widehat{u}(\cdot)$ (см., [1;34]), то при получении аналогичного условия для оптимального процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathbb{D}$ задачи (0.10) нужно варьировать управление $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ специальным образом, используя при этом п. п. последовательности, и точка ϑ при построении $u(\cdot, \vartheta, \varepsilon)$ выбирается также специальным образом.

Требует также исследования ряд свойств линейных п. п. систем управления, отвечающих $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathbb{D}$, которые используются при доказательстве теорем существования п. п. по Бору решения системы $\dot{x} = f(x, u(t, \vartheta, \varepsilon))$ и его зависимости от параметра ε. Отметим, что непосредственное доказательство необходимых условий оптимальности, помимо свойств п. п. игольчатой вариации $u(\cdot, \vartheta, \varepsilon)$, а также обозначенных выше теорем, требует еще ряда свойств и утверждений, связанных с п. п. функциями.

При получении необходимых условий оптимальности сначала доказывается, что оптимальное управление $\widehat{u}(\cdot)$ является решением задачи $M\{H(\widehat{x}(t),u(t),\widehat{p}(t))\} \to \sup$, $u(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, где $\widehat{p}(t)$ — п. п. по Бору решение системы

$$\dot{p} = -pf'_x(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)) + f'_{0x}(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)),$$

а $H(x,u,p) \doteq pf(x,u) - f_0(x,u)$ — функция Понтрягина задачи (0.10). Теперь возникает вопрос (в отличие от аналогичной ситуации в периодическом случае) о справедливости при п. в. $t \in \mathbb{R}$ поточечного максимума: $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} H(\widehat{x}(t),u,\widehat{p}(t)) = H(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t))$. Поскольку отображение $(t,u) \mapsto H(\widehat{x}(t),u,\widehat{p}(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, состоящему из функций, которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u \in \mathfrak{U}$, то положительный ответ на поставленный вопрос вытекает из соответствующего утверждения для ляпуновских п. п. задач.

Требуют специального рассмотрения также вопросы, связанные с поточечным максимумом в п. п. случае. Это обусловлено тем, что не для всякой функции $g \in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ существуют функции $\widehat{u}(\cdot) \in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, обеспечивающие при п. в. $t \in \mathbb{R}$ равенство $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} g(t,u) = g(t,\widehat{u}(t))$.

Таким образом, из вышесказанного следует, что изучение задач оптимального управления в классе п. п. функций предполагает наличие определенного математического аппарата. Основным определениям и свойствам п. п. по Степанову функций, которые необходимы при рассмотрении задач п. п. оптимизации, и посвящена эта работа.

В первом разделе данной работы вводятся основные функциональные пространства, используемые в дальнейшем, приводятся необходимые сведения теории п. п. функций. Достаточно подробно говорится о пространстве $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ (а также его подмножестве $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))$), состоящем из функций $(t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{Y}$ — сепарабельное метрическое пространство), которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по x, принадлежащему компактному метрическому пространству $\mathfrak{X}$. Это пространство, в частности, включает в себя совокупность непрерывных отображений $f\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, которые п. п. по $t\in\mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $x\in\mathfrak{X}$.

Далее, обобщенные управления — мерозначные управления, обладающие, по крайней мере, двумя преимуществами перед ґобычнымиЄ — выпуклостью и слабой компактностью, широко используются как в задачах управления и оптимального управления, так и в игровых задачах (см., например, [35–42] и приведенную там библиографию), и рассматриваются не только в связи с вопросами существования решения, но и служат инструментом качественного исследования в этих задачах. Точно так же и расширение множества п. п. по Степанову управлений до мерозначных п. п. управлений — APM, обусловлено вопросами существования решения в задачах $(\mathfrak{z}_{ap})$ и облегчает, в известной мере, исследования и доказательства ряда утверждений, связанных с такими задачами, что отчетливо проявляется, например, при варьировании оптимального п. п. процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$, построении и в свойствах конуса вариаций. Вопросу расширения п. п. по Степанову функций до пространства APM, а также доказательствам их основных свойств, играющих важную роль при рассмотрении задач $(\mathfrak{z}_{ap})$, посвящен второй раздел работы. Отметим, что мерозначные п. п. функции были введенны в работах [43;44] и использовались в задачах, связанных с п. п. системами управления [29;33;42–53]. Вместе с тем эти функции нашли также применение и при изучении свойств многозначных п. п. отображений [54–56].

В третьем разделе работы доказывается утверждение об аппроксимации мерозначных п. п. функций, которое играет основную роль в вопросе при обосновании корректности расширения (овыпуклления) задач $(\mathfrak{z}_{ap})$ и используется при получении необходимых условий оптимальности допустимого процесса такой задачи.

Четвертый раздел посвящен определению и исследованию п. п. игольчатой вариации $\widehat{\mu}(\cdot)\in APM_1$.

Последний раздел данной работы посвящен вопросу существования п. п. по Степанову сечения отображения

$$t \mapsto \mathcal{N}(t) \doteq \{x \in \mathfrak{X} \colon f(t,x) = 0\} \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X}),$$

отвечающего заданной функции $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$. Основное утверждение этого раздела играет важную роль при изучении связи п. п. по Бору решений п. п. по Степанову систем управления и дифференциальных включений, а также в вопросах, связанных с поточечным максимумом в почти периодическом случае.

Выражаю свою искреннюю признательность М. В. Чибиревой за помощь при подготовке рукописи к печати.

1. Элементы теории п. п. функций

1. Пусть $(\mathfrak{Y}, \rho)$ — метрическое пространство. Напомним [31], что функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ п. п. по Бору функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_B(f,\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} \colon \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho\big(f_\tau(t), f(t)\big) \leqslant \varepsilon\}$$

ее ε-п. п. относительно плотно (здесь и далее, $f_\tau(\cdot) \doteq f(\cdot + \tau)$ — сдвиг f на τ).

Приведем определение множества $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ п. п. по Степанову [31] функций $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$. С этой целью обозначим через $L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ совокупность таких измеримых функций $f \colon \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$, что при некотором (а значит, и любом) фиксированном $y \in \mathfrak{Y}$ отображение $t \mapsto \rho(y, f(t))$ принадлежит $L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. На множестве таких функций при каждом $l > 0$ определено d_l-расстояние (псевдометрика)

$$d_l(f,g) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_t^{t+l} \rho(f(s), g(s))\, ds, \quad f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$$

(если $l = 1$, то полагаем $d_1 \doteq d$). Отметим, что из неравенств

$$l_1 d_{l_1}(f,g) \leqslant l_2 d_{l_2}(f,g), \quad d_{l_2}(f,g) \leqslant 2 d_{l_1}(f,g), \quad l_1 < l_2, \tag{1.1}$$

вытекает топологическая эквивалентность d_l-расстояний. По определению [31] функция $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ принадлежит пространству $S_l(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_{S_l}(f, \varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} \colon d_l(f_\tau, f) \leqslant \varepsilon\}$$

ее ε-п. п. относительно плотно. В силу (1.1) далее рассматриваем лишь пространство $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}) \doteq S_1(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

Поскольку пространство $\mathfrak{Y}$ не предполагается линейным, то п. п. функции $f \colon \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$ нельзя поставить в соответствие ряд Фурье. Тем не менее можно определить понятие модуля. Напомним [32. С. 48], что последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ называется f-возвращающей для $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, если $\lim\limits_{j\to\infty} d(f_{\tau_j}, f) = 0$ (в случае, когда $f \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, эта последовательность является f-возвращающей, если и только если справедливо равенство $\lim\limits_{j\to\infty} (\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \rho(f_{\tau_j}(t), f(t))) = 0$). Множество $\mathrm{Mod}(f)$, состоящее из таких $\lambda \in \mathbb{R}$, что для каждой f-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ $\lim\limits_{j\to\infty} \exp(i\lambda\tau_j) = 1$ $(i^2 = -1)$, называется модулем функции $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Имеет место следующая теорема Фавара [32. С. 48]: если $f, g \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то $\mathrm{Mod}(f) \subset \mathrm{Mod}(g)$ в том и только том случае, если всякая f-возвращающая последовательность является g-возвращающей.

В дальнейшем, если не оговорено специально, считаем, что $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство. В этом случае [31;32] для каждой функции $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ существует среднее $M\{f(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \in \mathfrak{Y}$ и имеет место соответствие

$$f(t) \sim a_0 + 2\sum_{\lambda} a(\lambda)\cos\lambda t + b(\lambda)\sin\lambda t, \quad a_0 \doteq a(0),$$

в котором ряд называется рядом Фурье функции f, элементы $\mathrm{a}(\lambda) \doteq M\{f(t)\cos\lambda t\}$, $b(\lambda) \doteq M\{f(t)\sin\lambda t\}$ — коэффициентами Фурье, суммирование ведется по $\lambda \in \Lambda(f)$, где

$$\Lambda(f) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R} \colon \|a(\lambda)\| + \|b(\lambda)\| > 0\}$$

— множество показателей Фурье этого отображения. Отметим, что, если $\lambda \in \Lambda(f)$, то и $-\lambda \in \Lambda(f)$. Поэтому указанное выше соответствие можно представлять в комплекснозначном виде $f(t) \sim \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} c(\lambda) e^{i\lambda t}$, где $c(\lambda) \doteq a(\lambda) - ib(\lambda)$, $c(-\lambda) \doteq a(\lambda) + ib(\lambda)$ если $\lambda \in \Lambda(f)$ и $c(\lambda) = 0$, если $\lambda \notin \Lambda(f)$. Кроме того, множество $\Lambda(f)$ не более чем счетно, и если $\mathrm{Mod}(\Lambda(f))$ — модуль множества $\Lambda(f)$, т. е. [32. С. 46] наименьшая группа по сложению, содержащая $\Lambda(f)$, то $\mathrm{Mod}(f) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(f))$ — модуль $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

2. Пусть далее $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Через $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначим совокупность всех отображений

$$(t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathfrak{Y}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \tag{1.2}$$

которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора, соответственно в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$. По аналогии с конечномерным случаем (см., например, [30;31;57]) скажем, что функция f из $C(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} E_B(f(\cdot, x), \varepsilon)$ непусто и относительно плотно. Отметим, что отображение (1.2) принадлежит $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ в том и только том случае, если $f(\cdot, x) \in B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ при каждом $x \in \mathfrak{X}$ и $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} (\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \omega_\gamma[f(t, \cdot), \mathfrak{X}]) = 0$, где

$$\omega_\gamma[f(t, \cdot), \mathfrak{X}] \doteq \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathfrak{X} \\ \rho(x_1, x_2) < \gamma}} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|. \tag{1.3}$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Отображение (1.2) называется п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$, т. е. $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, если оно удовлетворяет одновременно следующим условиям: при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] = 0$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] \doteq \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathfrak{X} \\ \rho(x_1, x_2) < \gamma}} d(f(\cdot, x_1), f(\cdot, x_2)). \tag{1.4}$$

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. *Тогда*

1) *для любого* $\varepsilon > 0$ *множество*

$$\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} E_S(f(\cdot, x), \varepsilon) \tag{1.5}$$

непусто и относительно плотно;

2) *имеет место равенство* $\lim\limits_{\vartheta \to 0} (\sup\limits_{x \in \mathfrak{X}} d(f_\vartheta(\cdot, x), f(\cdot, x))) = 0$, *где* $f_\vartheta(t, x) \doteq f(t + \vartheta, x)$, *и* $\sup\limits_{x \in \mathfrak{X}} d(f(\cdot, x), 0) < \infty$*;*

3) *равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$ *существует среднее*

$$M\{f(t, x)\} \doteq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt;$$

4) *для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *пересечение множеств* $\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} E_S(f(\cdot, x), \varepsilon)$ *и* $\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} E_S(g(\cdot, x), \varepsilon)$ *непусто и относительно плотно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то, согласно определению 1.1, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] < 2\varepsilon/3$. Пусть точки $x_1 \ldots x_p \in \mathfrak{X}$ образуют конечную γ-сеть компакта $\mathfrak{X}$. Поскольку $f(\cdot, x_j) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ при каждом $j = 1 \ldots p$, то [31] множество $\bigcap\limits_{j=1}^{p} E_S(f(\cdot, x_j), \varepsilon/3)$ непусто и относительно плотно, кроме того, при каждом $j \in \{1 \ldots p\}$ $\lim\limits_{h \to 0} d(f_h(\cdot, x_j), f(\cdot, x_j)) = 0$ и $\sup\limits_{x \in \mathfrak{X}} d(f(\cdot, x_j), 0) < \infty$. Теперь, используя соответствующим образом неравенства

$$d(f_\xi(\cdot, x), f(\cdot, x)) \leqslant 2d(f(\cdot, x), f(\cdot, x_j)) + d(f_\xi(\cdot, x_j), f(\cdot, x_j)),$$
$$d(f(\cdot, x), 0)) \leqslant d(f(\cdot, x), f(\cdot, x_j)) + d(f(\cdot, x), 0)), \quad (\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X},$$

учитывая выбор константы $\gamma > 0$ и точек $x_1 \ldots x_p \in \mathfrak{X}$, получим первое и второе утверждение теоремы 1.1.

Далее, т.к. $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то при каждом $x \in \mathfrak{X}$ среднее $M\{f(t, x)\}$ существует. Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем τ из относительно плотного множества (здесь см. первое утверждение)

$\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x),\varepsilon/8)$, и пусть L — число, входящее в определение относительной плотности этого множества. Тогда для любых $p,q\in N$, следуя схеме доказательства существования среднего [31], получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\|\frac{1}{p+q}\int_0^{p+q} f(s,x)ds-\frac{1}{p}\int_0^{p} f(s,x)ds\|\leqslant\\ \leqslant 2\sup_{x\in\mathfrak{X}} d(f_\tau(\cdot,x),f(\cdot,x))+\frac{8L}{p}\sup_{x\in\mathfrak{X}} d(f(\cdot,x),0)<\\ <\frac{\varepsilon}{2}+\frac{8L}{p}\sup_{x\in\mathfrak{X}} d(f(\cdot,x),0),\end{gathered}$$

из которых, в свою очередь, вытекает третье утверждение.

Приведем, далее, схему доказательства последнего утверждения теоремы 1.1. С этой целью отметим, что, используя первое и второе утверждение этой теоремы, можно показать, что если $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, то для произвольно заданного $\varepsilon>0$ существуют такие числа $L,\eta>0$, что каждый отрезок $[a,a+L]$, $a\in\mathbb{R}$ содержит подотрезок длины η, все точки которого принадлежат множеству (1.5). Теперь, учитывая указанное свойство, для функций $f,g\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ надо практически повторить доказательство теоремы существования [31. С. 48] общего ε-п. п. для двух функций из пространства $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что и завершает доказательство теоремы.

Сейчас определим ряд Фурье для функций из $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Из теоремы 1.1 получаем, что для любых $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ и $g\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ отображение $(t,x)\mapsto g(t)f(t,x)$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ и, следовательно, для каждого $\lambda\in\mathbb{R}$ равномерно по $x\in\mathfrak{X}$ существует $M\{f(t,x)e^{-i\lambda t}\}\doteq F(\lambda,x)$, причем отображение $x\mapsto F(\lambda,x)$, $x\in\mathfrak{X}$ равномерно непрерывно. Теперь рассмотрим множество $\Lambda(f)\doteq\{\lambda\in\mathbb{R}\colon \max\limits_{x\in\mathfrak{X}}\|F(\lambda,x)\|>0\}$ и через $\Lambda(f(\cdot,x))$ обозначим множество показателей Фурье отображения $f(\cdot,x)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ при фиксированном $x\in\mathfrak{X}$. Из непрерывности при каждом λ функции $x\mapsto\|F(\lambda,x)\|$, $x\in\mathfrak{X}$ и компактности пространства $\mathfrak{X}$, по теореме Вейерштрасса [58. С. 251], получаем

$$\Lambda(f) = \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda(f(\cdot,x)). \tag{1.6}$$

Используя непрерывность функции $x \mapsto \|F(\lambda,x)\|$, можно показать, что для любого не более чем счетного всюду плотного множества $\{x_1, x_1 \dots\} \subset \mathfrak{X}$ имеет место равенство

$$\Lambda(f) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda(f(\cdot,x_j)), \tag{1.7}$$

а т. к. множество $\Lambda(f(\cdot,x_j))$ не более чем счетно, то таковым же является и $\Lambda(f)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть $f \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Тогда ряд в правой части соответствия $f(t,x) \sim \sum\limits_{\lambda} F(\lambda,x)\exp(i\lambda t)$ называется рядом Фурье отображения f, $\Lambda(f)$ — множеством его показателей Фурье, а $F(\lambda,x)$ — коэффициентами Фурье; $\mathrm{Mod}(f) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(f))$ — модуль для f.

Далее введем ряд функциональных пространств, а затем укажем некоторые подмножества пространства $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ совокупность отображений $f\colon \mathbb{T}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, удовлетворяющих условиям: $f(t,\cdot) \in C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ при п. в. $t\in\mathbb{T}$, для каждого $x \in \mathfrak{X}$ отображение $t \mapsto f(t,x) \in \mathfrak{Y}$ измеримо и существует такая функция $\psi_f \in L_1(\mathbb{T},\mathbb{R})$, что $\max\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|f(t,x)\| \leqslant \psi_f(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{T}$. На $\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ можно ввести норму (см., например, [36. С. 158])

$$\|f\|_{\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})} \doteq \int_{\mathbb{T}} \max_{x\in\mathfrak{X}} \|f(t,x)\|dt, \quad f\in\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y}). \tag{1.8}$$

Полученное нормированное пространство изометрически изоморфно банаховому пространству $L_1\big(\mathbb{T},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$ и имеет счетное всюду плотное множество

$$\Upsilon(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) \doteq \Big\{\sum_{j=1}^{N} a_j(\cdot)b_j(\cdot),$$

$$N\in\mathbb{N},\quad a_j\in C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}),\quad b_j\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}),\quad j=1\ldots N\Big\}. \tag{1.9}$$

З а м е ч а н и е 1.1. В дальнейшем через $\mathfrak{V}_1(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ обозначаем совокупность отображений $f\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, удовлетворяющих условиям, аналогичным для функций из пространства $\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, в которых надо заменить $\mathbb{T}$ на $\mathbb{R}$. Используя свойства пространств $L_1(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и $L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см. [36], [59–61]), можно показать, что отображение $f\mapsto\|f\|_{\mathfrak{V}_1(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})}$, определенное равенством (1.8) при $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, задает норму в $\mathfrak{V}_1(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, и что полученное нормированное пространство сепарабельно и изометрически изоморфно $L_1\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$.

Далее, через $\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ обозначим совокупность таких функций $f:\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, что $f\in\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ для каждого фиксированного отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Функция $f\in\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ удовлетворяет условию A), если для всякого $\sigma>0$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\big(\sup_{t\in\mathbb{R}}(\operatorname{mes}\{s\in[t,t+1]\colon\ \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]\geqslant\sigma\})\big)=0. \tag{1.10}$$

Непосредственно из данного определения вытекает следующая

Л е м м а 1.1. *Пусть* $f\in\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *удовлетворяет условию* A) *и*

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}}\|f(t,x)\|\doteq\mathfrak{k}<\infty. \tag{1.11}$$

Тогда $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[f,\mathfrak{X}]=0$.

Л е м м а 1.2. *Пусть функция f из* $\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *такова, что при каждом* $\varepsilon>0$ *множество* (1.5) *относительно плотно. Тогда f принадлежит* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое условие определения 1.1 здесь, очевидно, выполняется. Далее, по условию для заданного $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}(\varepsilon) \doteq \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x),\varepsilon/3)$ относительно плотно. Пусть $L = L(\varepsilon/3)$ — число, входящее в определение относительной плотности этого множества. Так как множество $\Upsilon([0,L+1]\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ (см. (1.9) при $\mathbb{T}=[0,L+1]$) всюду плотно в пространстве $\mathfrak{V}_1([0,L+1]\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, то $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{f}(\gamma)=0$, где

$$\mathfrak{f}(\gamma) \doteq \int_0^{L+1} \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds. \tag{1.12}$$

Выбираем $\gamma_0 > 0$ такое, что $\mathfrak{f}(\gamma) < \varepsilon/3$ для всех $\gamma \in (0,\gamma_0]$ и произвольного $t\in\mathbb{R}$ фиксируем $\tau \in [-t,-t+L]\bigcap\mathcal{E}(\varepsilon)$. Откуда для всех $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma$, получаем следующие соотношения:

$$\int_t^{t+1} \|f(s,x_1)-f(s,x_2)\|ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{x\in\mathfrak{X}} d(f_\tau(\cdot,x),f(\cdot,x)) + \mathfrak{f}(\gamma) < 2\varepsilon/3+\varepsilon/3,$$

т. е. (см. обозначение (1.4)) $\mathfrak{d}_\gamma[f,\mathfrak{X}]\leqslant\varepsilon$ при всех $\gamma\in(0,\gamma_0]$.

С л е д с т в и е 1.1. *Имеет место включение*

$$S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)\subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y}).$$

Л е м м а 1.3. *Пусть* $f\in S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$. *Тогда*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds)=0. \tag{1.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f\in S\big(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$, то для заданного $\varepsilon>0$ множество

$$E_S(f,\varepsilon/3)\doteq\{\tau\in\mathbb{R}\colon \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}\|f(s+\tau,x)-f(s,x)\|ds<\varepsilon/3\}$$

относительно плотно. Поэтому существует такое $L > 0$, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ существует $\tau \in [-t, -t+L] \bigcap E_S(f, \varepsilon/3)$ и, следовательно, при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеем неравенства

$$\int_t^{t+1} \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds \leqslant 2 \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{x\in\mathfrak{X}} \|f_\tau(s,x) - f(s,x)\|ds + \mathfrak{f}(\gamma) < \frac{2\varepsilon}{3} + \mathfrak{f}(\gamma),$$

где $\mathfrak{f}(\gamma)$ задано равенством (1.12). Теперь осталось воспользоваться тем, что $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{f}(\gamma) = 0$.

С л е д с т в и е 1.2. *Всякая функция f, принадлежащая $S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\big)$, удовлетворяет условию* A).

Л е м м а 1.4. *Пусть $f \in \mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и удовлетворяет условиям* A) *и* (1.11). *Тогда, если $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ при каждом $x \in \mathfrak{X}$, то $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\big)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция f удовлетворяет условиям A) и (1.11), то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\gamma > 0$, отвечающее $\sigma \doteq \varepsilon/2$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} (\mathrm{mes}\{s \in [t, t+1] \colon \omega_\gamma[f(s,\cdot), \mathfrak{X}] \geqslant \sigma/3\}) < \varepsilon/16\mathfrak{k}.$$

Теперь рассмотрим конечную γ-сеть $\{x_1 \ldots x_p\} \subset \mathfrak{X}$ компакта $\mathfrak{X}$ и зафиксируем точку τ из относительно плотного множества $\bigcap\limits_{j=1}^{p} E_S(f(\cdot, x_j), \varepsilon\sigma/24p)$. По теореме о максимуме [62. С. 27] для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется такое измеримое отображение $x: [t, t+1] \to \mathfrak{X}$, что при п. в. $s \in [t, t+1]$ выполнено равенство $\max\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|f_\tau(s,x) - f(s,x)\| = \|f_\tau(s, x(s)) - f(s, x(s))\|$. Полагаем $\mathcal{M}_j(t) \doteq \{s \in [t, t+1] : \rho(x(s), x_j) < \gamma\}$, $j = 1 \ldots p$, и пусть $T_1(t) \doteq \mathcal{M}_1(t)$, $T_j(t) \doteq \mathcal{M}_j(t) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} \mathcal{M}_k(t)$, $\quad 2 \leqslant j \leqslant p$. Тогда (напомним, что $\sigma = \varepsilon/2$)

$$\int_t^{t+1} \max_{x\in\mathfrak{X}} \|f_\tau(s,x) - f(s,x)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathfrak{k}\,\mathrm{mes}\{s \in [t,t+1]\colon\ \|f_\tau(s,x(s)) - f(s,x(s))\| \geqslant \sigma\} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\mathfrak{k}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{mes}\{s \in T_j(t)\colon\ \|f_\tau(s,x(s)) - f(s,x(s))\| \geqslant \sigma\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 4\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{mes}\{s \in [t,t+1]\colon\ \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}] \geqslant \frac{\sigma}{3}\}) +$$

$$+2\mathfrak{k}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{mes}\{s \in [t,t+1]\colon\ \|f_\tau(s,x_j) - f(s,x_j)\| \geqslant \frac{\sigma}{3}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{6\mathfrak{k}}{\sigma}\sum_{j=1}^{p} d\big(f_\tau(\cdot,x_j), f(\cdot,x_j)\big) < \varepsilon,$$

и тем самым лемма 1.4 доказана.

Далее, известно [31], что для каждой п. п. по Степанову функции $t \mapsto \mathfrak{f}[t](\cdot) \in C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ существует такая п. п. по Бору функция $t \mapsto \mathfrak{f}_h[t](\cdot) \in C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, $(h > 0)$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|\,\mathfrak{f}[s](\cdot) - \mathfrak{f}_h[s](\cdot)\|_{C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})}ds = 0.$$

Поскольку $\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) \cong L_1^{loc}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))$, то соответствующий результат справедлив и при представлении функции из $S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$ в виде отображения (1.2). Для удобства ссылок приведем это утверждение в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 1.2. *Для каждой функции* (1.2), *принадлежащей пространству* $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))$, *отвечающее ей при каждом* $h > 0$ *отображение* $(t,x) \mapsto f(t,x;h) \doteq \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} f(s,x)ds \in \mathfrak{Y}$ *п. п. по* $t \in \mathbb{R}$ *в смысле Бора равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$ *и при этом*

$$\lim_{h\downarrow 0}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in\mathfrak{X}}|f(s,x) - f(s,x;h)|ds) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, т.к. функция $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$, то по лемме 1.3 для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds < \varepsilon/3$. По этому γ строим конечную γ-сеть $x_1 \dots x_p$ компакта $\mathfrak{X}$. По теореме о максимуме [62] для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется такое измеримое отображение $x: [t, t+1] \to \mathfrak{X}$, что при п. в. $s \in [t, t+1]$ $\max\limits_{x\in\mathfrak{X}} \|f(s,x) - f(s,x;h)\| = \|f(s,x(s)) - f(s,x(s);h)\|$. Полагаем $\mathcal{M}_j(t) \doteq \{s \in [t,t+1]: \rho(x(s),x_j) < \gamma\}$, $j = 1 \dots p$, и пусть $T_1(t) \doteq \mathcal{M}_1(t)$, $\quad T_j(t) \doteq \mathcal{M}_j(t) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} \mathcal{M}_k(t)$, $\quad 2 \leqslant j \leqslant p$. Тогда

$$\int_t^{t+1} \max_{x\in\mathfrak{X}} \|f(s,x) - f(s,x;h)\|ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \int_{T_j(t)} \|f(s,x(s)) - f(s,x(s);h)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \Big(\int_{T_j(t)} \|f(s,x(s)) - f(s,x_j)\|ds + \int_{T_j(t)} \|f(s,x_j) - f(s,x_j;h)\|ds +$$

$$+ \int_{T_j(t)} \|f(s,x_j;h) - f(s,x(s);h)\|ds \Big) \leqslant 3 \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} d(f(\cdot,x_j), f(\cdot,x_j;h)) < 3\varepsilon/2 + \sum_{j=1}^{p} d(f(\cdot,x_j), f(\cdot,x_j;h)),$$

поскольку

$$\sum_{j=1}^{p} \int_{T_j(t)} \|f(s,x_j;h) - f(s,x(s);h)\|ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \int_{T_j(t)} \Big(\frac{1}{h} \int_s^{s+h} \omega_\gamma[f(\xi,\cdot),\mathfrak{X}]d\xi\Big)ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{t+1+h} \Big(\frac{1}{h} \int_{s-h}^{s} \omega_\gamma[f(\xi,\cdot),\mathfrak{X}]ds\Big)d\xi \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+2} \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}]ds.$$

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось воспользоваться тем, что при каждом j п. п. по Бору функция $f(\cdot,x_j;h)$

является стекловским усреднением для $f(\cdot, x_j) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и, следовательно [31], $\lim\limits_{h \downarrow 0} d(f(\cdot, x_j), f(\cdot, x_j; h)) = 0$.

3. В этом пункте приведем связь между п. п. функциями и п. п. последовательностями.

Л е м м а 1.5. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *множество*

$$a\mathbb{Z} \bigcap \Big(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} E_S\big(f(\cdot, x), \varepsilon\big) \Big) \qquad (a > 0) \tag{1.14}$$

непусто и относительно плотно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную a-периодическую по t равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ функцию g, принадлежащую $\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, такую, что $\mathfrak{g}_* \doteq \min\limits_{x \in \mathfrak{X}} \|\mathfrak{g}_1(x)\| > 0$, где $\mathfrak{g}_1(x) \doteq M\{g(t, x) \exp(-\frac{2\pi i}{a} t)\}$, и покажем, что для произвольного $\varepsilon_1 \in (0, 2\mathfrak{g}_*)$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1, a) > 0$, что $\big(\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} E_S(g(\cdot, x), \varepsilon_1)\big) \bigcap \{\tau \in \mathbb{R} \colon |\tau| < \delta \pmod a\} \neq \varnothing$. Действительно, если τ принадлежит первому множеству в этом пересечении, то из неравенств

$$\mathfrak{g}_* \cdot |e^{\frac{2\pi i}{a}\tau} - 1| \leqslant \|\mathfrak{g}_1(x)\| \cdot |e^{\frac{2\pi i}{a}\tau} - 1| \leqslant \sup_{x \in \mathfrak{X}} d\big(g_\tau(\cdot, x), g(\cdot, x)\big)$$

и выбора ε_1 получаем, что $|\sin(\frac{\pi\tau}{a})| < |\sin(\frac{\pi\varepsilon_1}{4\mathfrak{g}_*})|$. Откуда, выбирая $l \in \mathbb{Z}$ таким, что $|\pi\tau/a - \pi l| \leqslant \pi/2$, будем иметь неравенство $|\tau - la| < \delta \doteq (\varepsilon_1 a / 4\mathfrak{g}_*)$, т. е. τ принадлежит множеству $\{\tau \in \mathbb{R} \colon |\tau| < \delta \pmod a\}$. Далее, поскольку $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то, в силу теоремы 1.1, найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon/2) > 0$, что $\sup\limits_{x \in \mathfrak{X}} d\big(f_h(\cdot, x), f(\cdot, x)\big) \leqslant \varepsilon/2$ при $|h| \leqslant \eta$. Поэтому для всякого $\tau \in \bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} E_S\big(f(\cdot, x), \varepsilon/2\big)$ отрезок $[\tau - \eta, \tau + \eta] \subset \bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} E_S\big(f(\cdot, x), \varepsilon\big)$. Теперь выбираем $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon/2)$ так, чтобы для функции g отвечающее ему $\delta = \delta(\varepsilon_1, a)$ принадлежало $(0, \eta)$. Так как g принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, то множество

$$\mathcal{E}(\varepsilon_1) \doteq \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} E_S(f(\cdot, x), \varepsilon_1) \bigcap E_S(g(\cdot, x), \varepsilon_1)$$

относительно плотно. Покажем, что оно содержится в множестве, определенном в (1.14). В самом деле, если $\tau \in \mathcal{E}(\varepsilon_1)$, то, как было показано выше, найдется такое $l \in \mathbb{Z}$, что $|\tau - la| < \delta$, а т.к. $\tau < \eta$, то $la \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x),\varepsilon)$. Нужное включение доказано, а вместе с ним и утверждение леммы 1.5.

С л е д с т в и е 1.3. *Пусть* $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *множество* $aZ \bigcap E_S(f,\varepsilon)$ *непусто и относительно плотно.*

По аналогии с определением числовой п. п. последовательности [63; 64] скажем, что последовательность $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ банахового пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ п. п., если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}\colon \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \|x_{m+\mathfrak{n}} - x_m\|_X < \varepsilon\}$ ее ε-п. п. относительно плотно. Отметим, что для каждой п. п. последовательности $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset X$ существует среднее $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{1}{q}\sum\limits_{m=0}^{q-1} x_m \in X$, и для любых двух п. п. последовательностей $\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \{y_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset X$ при всяком $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon) \bigcap \mathcal{E}(\{y_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon) \neq \varnothing$ и относительно плотно.

О п р е д е л е н и е 1.4. Последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений

$$(t,x) \mapsto \mathfrak{f}_m(t,x) \in \mathfrak{Y}, \quad (t,x) \in [0,a] \times \mathfrak{X} \tag{1.15}$$

называется п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$, если при каждом $x \in \mathfrak{X}$ последовательность $\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ содержится в $L_1([0,a],\mathfrak{Y})$, является п. п. (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}\colon \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a \|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,x) - \mathfrak{f}_m(t,x)\| dt < \varepsilon\}$$

относительно плотно) и, кроме того, $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\mathfrak{X}] = 0$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\mathfrak{X}] \doteq \sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}} (\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a \|\mathfrak{f}_m(t,x_1) - \mathfrak{f}_m(t,x_2)\| dt).$$

Л е м м а 1.6. *Пусть последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *отображений* (1.15) *п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$. *Тогда функция* $f\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$, *определенная при каждом* $m\in\mathbb{Z}$ *на множестве* $[ma,(m+1)a]\times\mathfrak{X}$ *равенством*

$$f(t+ma,x)\doteq\mathfrak{f}_m(t,x),\quad (t,x)\in[0,a]\times\mathfrak{X},\tag{1.16}$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}$ и $x\in\mathfrak{X}$, то

$$d_a\big(f(\cdot+\mathfrak{n}a,x),f(\cdot,x)\big)\overset{(1.16)}{\leqslant}\frac{2}{a}\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a\|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(s,x)-\mathfrak{f}_m(s,x))\|ds.$$

Кроме того, если $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$ и $\rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma$, то

$$d_a\big(f(\cdot,x_1),f(\cdot,x_2)\big)\leqslant\frac{2}{a}\mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\mathfrak{X}].$$

Для завершения доказательства воспользуемся (1.1).

Из следствия 1.3 и определения 1.1 вытекает

Л е м м а 1.7. *Пусть функция* $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. *Тогда последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *отображений* (1.15), *определеленная при каждом* $m\in\mathbb{Z}$ *равенством* (1.16), *является п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$.

Теперь из лемм 1.5–1.7 и теоремы 1.1 получаем

С л е д с т в и е 1.4. *Функция* $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *в том и только в том случае, если последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *отображений* (1.15), *определенная при каждом* $m\in\mathbb{Z}$ *равенством* (1.16), *является п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$.

С л е д с т в и е 1.5. *Пусть последовательность функций* (1.15) *п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$. *Тогда при каждом* $\varepsilon>0$ *множество*

$$\bigcap_{x\in\mathfrak{X}}\mathcal{E}\big(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon\big)\tag{1.17}$$

относительно плотно и $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\big(\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^a\|\mathfrak{f}_m(t,x)\|dt\big)<\infty$.

Л е м м а 1.8. *Пусть последовательность* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *отображений, принадлежащая* $\mathfrak{V}_1([0,a]\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, *такова, что для любого* $\varepsilon>0$ *множество* (1.17) *непусто и относительно плотно. Тогда эта последовательность п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, заданное равенством (1.16) отображение $f:\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$. Несложно показать, что $f\in\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ и при каждом $\varepsilon>0$ множество (1.5) непусто и относительно плотно. Поэтому по лемме 1.2 $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, а в силу леммы 1.7 отвечающая ей последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ будет п. п. равномерно по $x\in\mathfrak{X}$.

С л е д с т в и е 1.6. *Пусть последовательность отображений* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *из* $L_1\big([0,a],C(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\big)$ *п. п. Тогда она является п. п. равномерно по* $x\in\mathfrak{X}$.

Приведем сейчас связь множества показателей Фурье п. п. функции и отвечающей ей п. п. последовательности.

Л е м м а 1.9. *Если последовательность*

$$\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$$

п. п., то найдется последовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$ *такая, что для п. в.* $t\in[0,a]$ *существует предел*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l}\sum_{m=0}^{q_l-1}\mathfrak{f}_m(t). \tag{1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ является п. п., то существует

$$\lim_{\substack{q\to\infty\\ q\in\mathbb{N}}}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}\mathfrak{f}_m\in L_1([0,a],\mathfrak{Y}).$$

Откуда вытекает, что последовательность отображений

$$t\mapsto\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}\mathfrak{f}_m(t)\in\mathfrak{Y},\ t\in[0,a]$$

является фундаментальной по мере, а значит, по теореме Рисса [36. С. 86], найдется такая последовательность $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, что $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$ и для п. в. $t \in [0,a]$ существует предел (1.18).

С л е д с т в и е 1.7. *Пусть последовательность*

$$\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$$

п. п. Тогда для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ *найдется такая последовательность* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, *что для п. в.* $t \in [0,a]$ *существует*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l} \sum_{m=0}^{q_l-1} \mathfrak{f}_m(t) e^{-i\lambda m} \doteq \mathcal{F}_\lambda(t). \tag{1.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ числовая последовательность $\{e^{-i\lambda m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. и следовательно последовательность $\{\mathfrak{f}_m e^{-i\lambda m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ будет п. п. Сейчас осталось воспользоваться утверждением леммы 1.9.

О п р е д е л е н и е 1.5. Пусть последовательность

$$\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$$

является п. п. Тогда множество $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$, состоящее из таких $\lambda \in \mathbb{R}$, что для п. в. $t \in [0,a]$ $\|\mathcal{F}_\lambda(t)\| > 0$ называется множеством показателей Фурье этой последовательности, а множество $\mathrm{Mod}(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \mathrm{Mod}\big(\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\big)$ — ее модулем.

Далее приведем практически элементарное доказательство следующей теоремы И. Я. Шнейберга [65].

Т е о р е м а 1.3. *Имеет место равенство*

$$\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) = a\Lambda(f) + 2\pi\mathbb{Z}, \tag{1.20}$$

где п. п. последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ *отвечает функции* $f \in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(t) \sim \sum\limits_{\lambda} A(\lambda)e^{i\lambda t}$. Тогда (см. (1.19)) при каждом $k \in \mathbb{Z}$

$$A\Big(\frac{\lambda}{a} + \frac{2\pi k}{a}\Big) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{q_s a} \sum_{m=0}^{q_s-1} \int_0^a \mathfrak{f}_m(t) e^{-i\lambda m} e^{-i\frac{\lambda}{a}t} e^{-i\frac{2\pi k}{a}t} dt =$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^a \mathcal{F}_\lambda(t) e^{-i\frac{\lambda}{a}t} e^{-i\frac{2\pi k}{a}t} dt,$$

т.е. число $A(\frac{\lambda}{a} + \frac{2\pi k}{a})$ совпадает с k-м коэффициентом Фурье отображения (см. (1.19)) $t \mapsto \mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t}$. Кроме того,

$$\mathfrak{A} \doteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\colon\ A\Big(\frac{\lambda}{a} + \frac{2\pi k}{a}\Big) \neq 0\Big\} = a\Lambda(f) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Поэтому для доказательства равенства (1.20) достаточно показать, что $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) = \mathfrak{A}$. Для доказательства последнего равенства заметим сначала, что $\mathcal{F}_\lambda(t) = 0$ для п. в. $t \in [0,a]$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t} = 0$ при п. в. $t \in [0,a]$. Теперь из определения 1.5 и доказанного выше равенства $A(\frac{\lambda}{a} + \frac{2\pi k}{a}) = \frac{1}{a}\int\limits_0^a \mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t}e^{-i\frac{2\pi k}{a}t}dt$ получаем: $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset \mathfrak{A}$. Далее, если λ не принадлежит множеству $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$, то для п. в. $t \in [0,\text{a}]$ $\mathcal{F}_\lambda(t)e^{-i\frac{\lambda}{a}t} = 0$. Следовательно, по теореме о единственности разложения функций в ряд Фурье [61. С. 419] $A(\frac{\lambda}{a} + \frac{2\pi k}{a}) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) = \mathfrak{A}$.

Рассмотрим, далее, п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ последовательность отображений (1.15). По определению 1.4 при каждом $x \in \mathfrak{X}$ последовательность $\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ является п. п. Обозначим (см. определение 1.5) через $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ множество ее показателей Фурье.

О п р е д е л е н и е 1.6. Пусть задана последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ функций (1.15) п. п. равномерно относительно

$x \in \mathfrak{X}$. Тогда множество

$$\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \tag{1.21}$$

называется множеством показателей Фурье этой последовательности.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть функция* $f \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *и* $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — *отвечающая ей п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$ *последовательность отображений, определенных при каждом* $m \in \mathbb{Z}$ *равенством* (1.16). *Тогда множество* $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$ *показателей Фурье этой последовательности связано с множеством* $\Lambda(f)$ *показателей Фурье функции* f *равенством* (1.20).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы 1.3 вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) \overset{(1.21)}{=} \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \overset{(1.20)}{=}$$

$$\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} (a\Lambda\big(f(\cdot,x)\big)+2\pi\mathbb{Z}) = a\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda\big(f(\cdot,x)\big)+2\pi\mathbb{Z}) \overset{(1.6)}{=} a\Lambda(f)+2\pi\mathbb{Z}.$$

С л е д с т в и е 1.8. *Пусть последовательность отображений* (1.15) *является п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$. *Тогда множество* $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$ *не более чем счетно и для любого фиксированного счетного всюду плотного в* $\mathfrak{X}$ *множества* $\{x_1,x_2,\dots\}$ *точек из* $\mathfrak{X}$ $\quad \Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x_j)\}_{m\in\mathbb{Z}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отвечающую нашей последовательности (см. равенство (1.16) леммы 1.6) функцию $f \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Теперь из соотношений

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,x_j)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \overset{(1.20)}{=} a\bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda\big(f(\cdot,x_j)\big)+2\pi\mathbb{Z} \overset{(1.7)}{=}$$

$$\overset{(1.7)}{=} a\,\Lambda(f)+2\pi\mathbb{Z} = \Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$$

получаем нужное равенство, и т. к. по теореме 1.3 при каждом $j \in \mathbb{N}$ множество $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot, x_j)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ не более чем счетно, то и множество $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})$ не более чем счетно.

4. В дальнейшем нам понадобится следующая

Т е о р е м а 1.5. *Пусть заданы функция* $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ *и отвечающая ей п. п. последовательность*

$$\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset L_1([0,a], \mathfrak{Y}), \quad \mathfrak{f}_m(t) \doteq f_{ma}(t), \quad t \in [0,a].$$

Пусть также задан сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, *где* $a_k > 0$. *Тогда из любого неограниченного множества* $Q \subset \mathbb{N}$ *можно выделить такую последовательность* $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{i\to\infty} q_i = \infty$, *что из всякой заданной последовательности* $\{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,a]$, $\lim\limits_{j\to\infty} \eta'_j = 0$, *можно извлечь такую подпоследовательность* $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$, *что для п. в.* $\vartheta \in [0,a]$ *будут выполнены равенства:*

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{i\to\infty} \frac{1}{q_i a} \sum_{m=0}^{q_i-1} \frac{1}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} \|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta) - \mathfrak{f}_m(\vartheta)\| dt\Big) = 0, \qquad (1.22)$$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{i\to\infty} \frac{1}{q_i a} \sum_{m=0}^{q_i-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} \|\mathfrak{f}_{m+k}(t+\vartheta) - \mathfrak{f}_{m+k}(\vartheta)\| dt\Big) = 0. \qquad (1.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим последовательность функций $\{g_{m+k}\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{L} \doteq L_1\big([0,a], C([0,a],\mathbb{R})\big)$, определенную при всяком $m \in \mathbb{Z}$ равенством

$$g_{m+k}(\vartheta, \eta) \doteq \int_0^{\eta} \|\mathfrak{f}_{m+k}(t+\vartheta) - \mathfrak{f}_{m+k}(\vartheta)\|\, dt, \quad 0 \leqslant \vartheta, \eta \leqslant a.$$

Поскольку при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \|g_{m+k+\mathfrak{n}} - g_{m+k}\|_{\mathcal{L}} \doteq$$

$$\doteq \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a \max_{\eta\in[0,a]} \|g_{m+k+\mathfrak{n}}(\vartheta,\eta) - g_{m+k}(\vartheta,\eta)\| d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant 3 \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a \|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t) - \mathfrak{f}_m(t)\| dt,$$

то последовательность $\{g_{m+k}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является равностепенно п. п. относительно $k \in \mathbb{Z}_+$, и для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon/3) \subset \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{E}(\{g_{m+k}\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon).$$

Поэтому из определения этой последовательности, следуя схеме доказательства соответствующего утверждения для числовых п. п. последовательностей [63. C.178], можно показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что при всех $j \in \mathbb{N}$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \| \sum_{m=k}^{j+k-1} g_m - \sum_{m=0}^{j-1} g_m\|_{\mathcal{L}} \leqslant 4a^2\mathfrak{l}F + \frac{\varepsilon}{4}j,$$

где $F \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{a}\int_t^{t+a} \|f(s)\| ds$. В свою очередь, последнее неравенство, позволяет доказать, что при всех $q \in \mathbb{N}$, для последовательности функций $\{c_q\}_{q\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$, в которой

$$c_q(\vartheta,\eta) \doteq \frac{1}{qa} \sum_{m=0}^{q-1} g_m(\vartheta,\eta),$$

имеет место следующее неравенство:

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \|c_{q+k} - c_k\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{8a^2\mathfrak{l}F}{q}.$$

Стало быть, последовательность $\{c_q\}_{q\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ является фундаментальной. Поэтому в силу полноты пространства $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ найдется такая функция $c \in \mathcal{L}$, что будет выполнено равенство

$$\lim_{q\to\infty} \|c_q - c\|_{\mathcal{L}} \doteq \lim_{q\to\infty} \int_0^a \max_{\eta\in[0,a]} \|c_q(\vartheta,\eta) - c(\vartheta,\eta)\| d\vartheta = 0, \quad (1.24)$$

и т. к. $\lim\limits_{q\to\infty}(\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}\|c_{q+k}-c_q\|_{\mathcal{L}})=0$, то $\lim\limits_{q\to\infty}(\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}\|c_{q+k}-c\|_{\mathcal{L}})=0$. Поэтому, полагая

$$A\doteq\sum_{k=0}^{\infty}a_k,\ b_q(\vartheta,\eta)\doteq\sum_{k=0}^{\infty}a_kc_{q+k}(\vartheta,\eta),\ q\in Q\subset\mathbb{N},\ 0\leqslant\vartheta,\eta\leqslant a,$$

получаем равенство $\lim\limits_{q\to\infty}\|b_q-Ac\|_{\mathcal{L}}=0$. Теперь, учитывая определение $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, из (1.24) и последнего предельного равенства получаем, что найдется такая последовательность $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}\subset Q$, $\lim\limits_{i\to\infty}q_i=\infty$, для которой при п. в. $\vartheta\in[0,a]$ будут иметь место при $i\to\infty$ следующие предельные соотношения:

$$\begin{cases}\frac{1}{q_ia}\sum\limits_{m=0}^{q_i-1}g_m(\vartheta,\eta)\underset{\eta\in[0,a]}{\rightrightarrows}c(\vartheta,\eta),\\ \frac{1}{q_ia}\sum\limits_{m=0}^{q_i-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kg_{m+k}(\vartheta,\eta)\underset{\eta\in[0,a]}{\rightrightarrows}Ac(\vartheta,\eta).\end{cases}\tag{1.25}$$

Рассмотрим далее множество функций $\{\zeta_\eta,\eta\in(0,a]\}$ из $L_1([0,a],\mathbb{R})$, где $\zeta_\eta(\vartheta)\doteq\frac{1}{\eta}c(\vartheta,\eta)$, $\vartheta\in[0,a]$. Покажем, что

$$\lim_{\eta\downarrow0}\int_0^a\zeta_\eta(\vartheta)d\vartheta=0.\tag{1.26}$$

Действительно, при каждом $\eta\in(0,a]$ имеем следующие соотношения:

$$\int_0^a\zeta_\eta(\vartheta)d\vartheta\overset{(1.25)}{=}\frac{1}{\eta}\int_0^a(\lim_{i\to\infty}\frac{1}{q_ia}\sum_{m=0}^{q_i-1}\int_0^\eta\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_m(\vartheta)\|dt)d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{\eta}\lim_{i\to\infty}\frac{1}{q_ia}\sum_{m=0}^{q_i-1}\int_0^a(\int_0^\eta\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_m(\vartheta)\|dt)d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{\eta}\lim_{i\to\infty}\frac{1}{q_ia}\sum_{m=0}^{q_i-1}\int_0^\eta(\int_0^a\|\mathfrak{f}_m(t+\vartheta)-\mathfrak{f}_m(\vartheta)\|d\vartheta)dt\leqslant\sup_{t\in[0,\eta]}d_a(f_t,f).$$

Откуда, принимая во внимание, что $\lim\limits_{\eta\downarrow 0}\big(\sup\limits_{t\in[0,\eta]} d_a(f_t,f)\big)=0$, получаем равенство (1.26), из которого, в свою очередь, вытекает, что из любой, стремящейся к нулю при $j\to\infty$ последовательности $\{\eta'_j\}_{j=1}^{\infty}\subset(0,a]$ можно выделить такую подпоследовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$, что для п. в. $\vartheta\in[0,a]$ $\lim\limits_{j\to\infty}\zeta_{\eta_j}(\vartheta)=0$. Теперь из (1.25) получаем нужные равенства (1.22), (1.23).

2. Пространство мерозначных п. п.функций

1. В этом пункте приведем необходимые для дальнейшего определения и обозначения.

Для фиксированного $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ определим следующие множества

$$\mathrm{frm}(\mathfrak{U})\doteq\{\nu\in\mathrm{frm}(\mathbb{R}^m)\colon\ \mathrm{supp}(\nu)\subset\mathfrak{U}\},$$
$$\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\doteq\{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathbb{R}^m)\colon\ \mathrm{supp}(\nu)\subset\mathfrak{U}\},$$

где $\mathrm{frm}(\mathbb{R}^m)$ — линейное пространство мер Радона на $\mathbb{R}^m$ и $\mathrm{rpm}(\mathbb{R}^m)$ — его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона, $\mathrm{supp}(\nu)$ — носитель меры ν. Через $DIR(\mathfrak{U})$ обозначим совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u\in\mathfrak{U}$.

В дальнейшем в силу теоремы Рисса [36. С.138] каждую меру $\nu\in\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ рассматриваем как отображение

$$c(\cdot)\mapsto\langle\nu,c(u)\rangle\doteq\int_{\mathfrak{U}}c(u)\nu(du),\ \ c(\cdot)\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R}),$$

принадлежащее $\big(C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)^*$, и в связи с этим ее вариацию $|\nu|(\mathfrak{U})$ определяем равенством $|\nu|(\mathfrak{U})\doteq\sup\limits_{\|c\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\leqslant 1}|\langle\nu,c(u)\rangle|$. На множестве $\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ можно задать (слабую) норму [31. С.138]

$$|\nu|_w\doteq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-j}}{1+\|c_j\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}}\cdot\langle\nu,c_j(u)\rangle,\quad \nu\in\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),$$

где функции c_j, $j \in \mathbb{N}$ принадлежат счетному всюду плотному в $C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ множеству $\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \subset C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$. Полученное нормированное пространство $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$ сепарабельно, и если

$$\rho_w(\nu_1,\nu_2) \doteq |\nu_1-\nu_2|_w,$$

то метрическое пространство $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}),\rho_w)$ компактно. Отметим также, что отображение $u \mapsto \delta_u \in DIR(\mathfrak{U}) \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}),\rho_w)$, $u \in \mathfrak{U}$ является гомеоморфизмом.

Обозначим через $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}\big(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$ совокупность таких измеримых отображений $\mu\colon \mathbb{R} \to (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$, что

$$\|\mu\| \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\mu(t)|(\mathfrak{U}) < \infty.$$

Можно показать, что $\mu \in \mathcal{M}$ в том и только в том случае, если для всякой функции $c \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$, отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u)\rangle$, $t \in \mathbb{R}$ измеримо. Кроме того, если $\mu \in \mathcal{M}$, то для любой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1 \doteq \mathfrak{V}_1(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ (см. замечание 1.1) отображение

$$t \mapsto \langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} \varphi(t,u)\mu(t)(du) \tag{2.1}$$

принадлежит $L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Незначительно изменив схему доказательства теоремы Данфорда–Петтиса [36. С.299] о структуре пространства $\big(\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)^*$ для случая, когда $\mathbb{T} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R})$, можно показать, что $\mathcal{M} \cong \mathfrak{V}_1^*$. Поэтому в дальнейшем каждое $\mu \in \mathcal{M}$ рассматриваем как функцию

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle dt \overset{(2.1)}{=} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathfrak{U}} \varphi(t,u)\mu(t)(du)\Big)\, dt,\ \ \varphi \in \mathfrak{V}_1,$$

принадлежащую пространству $\mathfrak{V}_1^*$. Далее, отображение

$$\mu \mapsto \|\mu\|_w \doteq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1+\|\varphi_j\|_{\mathfrak{V}_1}} \cdot \Big| \int_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle dt \Big|, \quad \mu \in \mathcal{M},$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathfrak{V}_1$ — счетное всюду плотное множество в $\mathfrak{V}_1$, задает норму в $\mathcal{M}$. Полученное нормированное пространство $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_w)$ является сепарабельным, и два его подмножества $\mathcal{M}_1 \doteq \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, $\mathfrak{S}_1 \doteq \{\mu \in \mathcal{M} \colon \|\mu\| \leqslant 1\}$ компактны, причем если $\mu_j, \mu \in \mathfrak{S}_1$, $j \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \|\mu_j - \mu\|_w = 0$ в том и только в том случае, если для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1$ справедливо равенство

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \langle \mu_j(t), \varphi(t,u)\rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle dt. \tag{2.2}$$

Пусть, далее, $\mathcal{M}_1^{(1)} \doteq \{\mu \in \mathcal{M}_1 : \mu(t) = \delta_{u(t)}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и некотором $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\}$ и $\mathbb{U}$ — совокупность всех измеримых отображений $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$. Тогда, во-первых, если $\mu(\cdot) = \delta_{u(\cdot)} \in \mathcal{M}_1^{(1)}$, то $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, а во-вторых, отображение $u(\cdot) \mapsto \delta_{u(\cdot)} \in \mathcal{M}_1^{(1)}$, $\quad u(\cdot) \in \mathbb{U}$ биективно. Следовательно, каждое $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ можно рассматривать как элемент из $\mathcal{M}_1^{(1)} \subset \mathcal{M}_1$, отождествляя его с отображением $t \mapsto \delta_{u(t)}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Введем далее понятие мерозначной п. п. функции.

О п р е д е л е н и е 2.1. Отображение $\mu(\cdot)$, принадлежащее $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}\big(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$, называется п. п. по Степанову, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u)\rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Совокупность всех п. п. по Степанову отображений из $\mathcal{M}$ обозначим $APM \doteq APM(\mathfrak{U})$, и через $APM_1 \doteq APM_1(\mathfrak{U})$ обозначим множество $APM \bigcap \mathcal{M}_1$.

Сделаем ряд замечаний по поводу определения 2.1.

З а м е ч а н и е 2.1. Несложно показать, что $\mu \in APM$ в том и только в том случае, если для каждой функции $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ (напомним, что $\mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ — счетное, всюду плотное в $C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ множество функций из $C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$) отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u)\rangle$, далее пишем просто $\langle \mu(\cdot), c(u)\rangle$, принадлежит $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

З а м е ч а н и е 2.2. Аналогично определению 2.1 можно задать почти периодичность функций из пространства $\mathcal{M}$ и в другом смысле, например в смысле Вейля или Безиковича [31]. В частности, отображение $\mu \in C\big(\mathbb{R}, (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)\big)$ называется п. п. по Бору (пишем $\mu \in B(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, если для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ (или $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$) отображение $\langle \mu(\cdot), c(u)\rangle$ принадлежит $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

З а м е ч а н и е 2.3. Поскольку $f = (f_j)_{j=1}^n \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ в том и только в том случае, если при каждом $j = 1 \dots n$ $f_j \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, и т. к. интегрирование функций из $C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ по мере $\mu(t) \in \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ покоординатное, то $\mu \in APM$ в том и только в том случае, если для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ отображение $\langle \mu(\cdot), c(u)\rangle \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

З а м е ч а н и е 2.4. Из определения нормированного пространства $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}(\mathbb{R}, (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w))$ следует возможность задания на нем d_{ρ_w} -расстояния

$$d_{\rho_w}(\mu, \nu) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\mu(s) - \nu(s)|_w ds, \quad \mu, \nu \in \mathcal{M}. \tag{2.3}$$

Поэтому почти периодичность μ из $\mathcal{M}$ можно определить в смысле пространства $S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, т. е. (см. п. 1 из первого раздела) $\mu \in S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_S(\mu, \varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} \colon\, d_{\rho_w}(\mu_\tau, \mu) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно.

Л е м м а 2.1. *Отображение* $\mu \in S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ *в том и только в том случае, если оно п. п. по Степанову в смысле определения* 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mu \in APM$, то, используя неравенство

$$d_{\rho_w}(\mu_\tau, \mu) \leqslant \sum_{j=1}^{j_0} \frac{2^{-j}}{1 + \|c_j\|_{C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})}} \times$$

$$\times \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\langle \mu_\tau(s) - \mu(s), c_j(u)\rangle| ds + \|\mu\| \sum_{j=j_{0+1}}^{\infty} 2^{-j+1},$$

где $j_0 \in \mathbb{N}$, и замечание 2.1, несложно показать, что μ принадлежит $S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$. И наоборот, если $\mu \in S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, то для доказательства того, что $\mu \in APM$, надо воспользоваться неравенством

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\langle \mu_\tau(s) - \mu(s), c(u)\rangle ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\mu\| \cdot \|c - c_{j_0}\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})} + 2^{j_0}(1 + \|c_{j_0}\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}) d_{\rho_w}(\mu_\tau, \mu),$$

справедливого для всякой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, любом фиксированном $j_0 \in \mathbb{N}$ и каждом $\tau \in \mathbb{R}$.

Таким образом, почти периодичность отображения $\mu \in \mathcal{M}$ в смысле определения 2.1 равносильна его почти периодичности в смысле пространства $S(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$. Однако при исследовании структуры пространства мерозначных п. п. отображений удобнее пользоваться определением 2.1. Отметим также, что доказанная лемма 2.1 обосновывает некоторые определения пространства APM. В частности, теперь естественно следующее

О п р е д е л е н и е 2.2. Множество $\mathfrak{A} \subset APM$ называется равностепенно п. п., если для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ подмножество $\{\langle \mu(\cdot), c(u)\rangle,\ \ \mu(\cdot) \in \mathfrak{A}\}$ из $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ является равностепенно п. п.

Пусть, далее,

$$APM_1^{(1)} \doteq \{\mu \in APM_1 \colon \mu(t) = \delta_{u(t)}$$
$$\text{при п. в. } t \in \mathbb{R} \text{ и некотором } u\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\}. \tag{2.4}$$

Л е м м а 2.2. *Функция* $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ *в том и только в том случае, если отображение* $\delta_{u(\cdot)} \in APM_1^{(1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_{u(\cdot)} \in APM_1^{(1)}$. Так как $APM_1^{(1)} \subset \mathcal{M}_1^{(1)}$, то функция $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$ измерима и (см.замечание 2.3) отображение $\langle\delta_{u(\cdot)}, c(u)\rangle \doteq c(u(\cdot))$ принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ для каждой функции $c(\cdot)\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^m)$. Взяв $c(u)\equiv u$, получаем, что $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$. Пусть теперь функция $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$. Покажем, что $\delta_{u(\cdot)}\in APM_1^{(1)}$. Действительно, т. к. $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, то каждая функция $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ равномерно непрерывна. Следовательно, если $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что $|c(u_1-c(u_2)|<\varepsilon/2$, если $|u_1-u_2|\leqslant\delta$, $u_1,u_2\in\mathfrak{U}$. Докажем, что относительно плотное множество $E_S(u,\delta\varepsilon/4\gamma)$, $\gamma\doteq\|c\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}$, содержится в $E_S(c\circ u,\varepsilon)$. Пусть $\tau\in E_S(u,\delta\varepsilon/4\gamma)$ и $\mathcal{F}(t)\doteq\{s\in[t,t+1]\colon |u_\tau(s)-u(s)|>\delta\}$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда из следующих соотношений

$$d(c\circ u_\tau, c\circ u)\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathcal{F}(t)}|c(u(s+\tau))-c(u(s))|ds+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\gamma}{\delta}d(u_\tau,u)+\varepsilon/2\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

получаем нужное включение. Для завершения доказательства осталось воспользоваться равенством $\langle\delta_{u(\cdot)}, c(u)\rangle = c(u(\cdot))$ и определением 2.1.

Таким образом, лемма 2.2 показывает, что существует взаимно однозначное соответствие между $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ и $APM_1^{(1)}$. Поэтому каждую функцию $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ будем рассматривать так же, как элемент множества $APM_1^{(1)}\subset APM_1$, отождествляя его с отображением $\delta_{u(\cdot)}$. В этом смысле $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ вкладывается в $APM_1\subset APM$.

Далее, для компактного метрического пространства $(\mathfrak{X},\rho)$ и сепарабельного нормированного пространства $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),|\cdot|_w)$ рассмотрим множество $S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$, состоящее из отображений $(t,x)\mapsto\mu(t,x)\in\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$, которые п. п. по $t\in\mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x\in\mathfrak{X}$, т. е. (см. определение 1.1 при $\mathfrak{Y}=\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$) каждое $\mu\colon\mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ удовлетворяет следующим условиям: для каждого $x\in\mathfrak{X}$ $\mu(\cdot,x)\in S\big(\mathbb{R},\mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}]=0$, где (см. обозначение (2.3))

$$\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}]\doteq\sup\{d_{\rho_w}\big(\mu(\cdot,x_1),\mu(\cdot,x_2)\big)\colon x_1,x_2\in\mathfrak{X},\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma\}.$$

В дальнейшем, если не оговорено специально, ограничимся рассмотрением важного при исследовании задач оптимального управления п. п. движениями подмножества $S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ множества $S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$. Согласно определению, это множество состоит из отображений $\mu\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{X}\to\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, удовлетворяющих следующим условиям: при каждом $x\in\mathfrak{X}$ $\mu(\cdot,x)\in S\big(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}]=0$.

Л е м м а 2.3. *Для того чтобы* $\mu\in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции* $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ *отображение*

$$(t,x)\mapsto\langle\mu(t,x),c(u)\rangle\doteq\int_{\mathfrak{U}}c(u)\mu(t,x)(du)$$

принадлежало пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu\in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$. Тогда для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$, в силу леммы 2.2 и определения 2.1, отображение

$$t\mapsto f_c(t,x)\doteq\langle\mu(t,x),c(u)\rangle,\ x\in\mathfrak{X}$$

принадлежит $S\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$. Далее, из неравенства (см. (2.3), (1.4) и определение нормы $|\cdot|_w$)

$$\mathfrak{d}_\gamma[f_c,\mathfrak{X}]\leqslant 2\|c-c_{j_0}\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}+2^{j_0}\big(1+\|c_{j_0}\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\big)^{-1}\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}],\ j_0\in\mathbb{N},$$

учитывая, что $c_{j_0}\in\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}]=0$, получим, что $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[f_c,\mathfrak{X}]=0$. Откуда по определению 1.1 $f_c\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$. Пусть теперь для каждой функции c из $C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ f_c принадлежит $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$. Тогда, снова по лемме 2.2 и определению 2.1, получаем, что при каждом $x\in\mathfrak{X}$ $\mu(\cdot,x)\in S\big(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$. Далее, используя неравенство

$$\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}]\leqslant\sum_{j=1}^{j_0}\frac{2^{-j}}{1+\|c_j\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}}\cdot\mathfrak{d}_\gamma[f_c,\mathfrak{X}]+\sum_{j=j_0}^{\infty}2^{-j+1},\quad j_0\in\mathbb{N}$$

и определение 1.1, получим, что $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[\mu,\mathfrak{X}]=0$.

3. В этом пункте определим ряд Фурье для мерозначного п. п. отображения.

Пусть $\mu \in APM$. Тогда по определению 2.1 для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ отображение $\langle\mu(\cdot),c(u)\rangle\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и, следовательно, имеет место следующее соответствие:

$$\langle\mu(t),c(u)\rangle \sim \mathbb{A}_\mu[c,0]+2\sum_\lambda \mathbb{A}_\mu[c,\lambda]\cos\lambda t+\mathbb{B}_\mu[c,\lambda]\sin\lambda t,$$

в котором

$$\begin{cases}\mathbb{A}_\mu[c,\lambda]\doteq M\{\langle\mu(t),c(u)\rangle\cos\lambda t\},\\ \mathbb{B}_\mu[c,\lambda]\doteq M\{\langle\mu(t),c(u)\rangle\sin\lambda t\},\end{cases} \tag{2.5}$$

и суммирование ведется по λ, принадлежащих множеству

$$\Lambda(\mu,c)\doteq\{\lambda\in\mathbb{R}\colon\ |\mathbb{A}_\mu[c,\lambda]|+|\mathbb{B}_\mu[c,\lambda]|>0\}$$

показателей Фурье этого отображения. Далее, т. к. $\mu\in\mathcal{M}$, то из (2.5) получаем, что $\mathbb{A}_\mu[\cdot,\lambda]$, $\mathbb{B}_\mu[\cdot,\lambda]\in\big(C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)^*$ при каждом $\lambda\in\mathbb{R}$. Поэтому, по теореме Рисса [36. С.138], существуют такие меры $\alpha_\lambda,\beta_\lambda\in\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$, что для всех $c\in C(\mathfrak{U},R\big)$

$$\mathbb{A}_\mu[c,\lambda]=\langle\alpha_\lambda,c(u)\rangle,\ \mathbb{B}_\mu[c,\lambda]=\langle\beta_\lambda,c(u)\rangle. \tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим множество

$$\Lambda(\mu)\doteq\{\lambda\in\mathbb{R}\colon\ |\alpha_\lambda|(\mathfrak{U})+|\beta_\lambda|(\mathfrak{U})|>0\}. \tag{2.7}$$

Из определения вариации меры, а также множеств $\Lambda(\mu)$ и $\Lambda(\mu,c)$, вытекает равенство

$$\Lambda(\mu)=\bigcup_{c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\Lambda(\mu,c). \tag{2.8}$$

Л е м м а 2.4. *Множество $\Lambda(\mu)$ не более чем счетно, и для любого фиксированного счетного, всюду плотного в $C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R}) \subset C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$*

$$\Lambda(\mu) = \bigcup_{c\in\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R})} \Lambda(\mu, c). \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение

$$\bigcup_{c\in\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R})} \Lambda(\mu, c) \doteq \mathfrak{A} \subset \Lambda(\mu)$$

очевидно. Теперь если $\lambda \notin \mathfrak{A}$, то в силу (2.6) $\langle\alpha_\lambda, c(u)\rangle = 0$, $\langle\beta_\lambda, c(u)\rangle = 0$ для всех $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R})$. Откуда по теореме Хана–Банаха [61] получаем, что $|\alpha_\lambda|(\mathfrak{U}) = |\beta_\lambda|(\mathfrak{U})| = 0$ и, значит, λ не принадлежит $\Lambda(\mu)$. Равенство (2.9) доказано, и т. к. $\Lambda(\mu, c)$ — не более чем счетное множество, то в силу этого равенства множество $\Lambda(\mu)$ также не более чем счетно.

Теперь естественно следующее (см. (2.6)–(2.9))

О п р е д е л е н и е 2.3. Пусть $\mu \in APM$. Тогда ряд в правой части следующего соответствия

$$\mu(t) \sim \alpha_0 + \sum_\lambda \alpha_\lambda \cos\lambda t + \beta_\lambda \sin\lambda t \tag{2.10}$$

называется рядом Фурье отображения μ, меры $\alpha_\lambda, \beta_\lambda \in \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ — коэффициентами Фурье и не более чем счетное множество $\Lambda(\mu)$ — множеством его показателей Фурье.

З а м е ч а н и е 2.5. В дальнейшем соответствие (2.10) для $\mu \in APM$ записываем в комплексном виде

$$\mu(t) \sim \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \nu_\lambda \exp(i\lambda t),$$

где $\nu_\lambda \doteq \alpha_\lambda - i\beta_\lambda$, $\nu_{-\lambda} \doteq \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$, если $\lambda \in \Lambda(\mu)$, и считаем меры ν_λ нулевыми, если $\lambda \notin \Lambda(\mu)$.

Далее, если $\mu \in APM$, то $\mathrm{Mod}(\mu) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\mu))$ — модуль отображения μ. Из этого определения и равенства (2.8) вытекает

Л е м м а 2.5. *Пусть* $\mu, \nu \in APM$ *и для всех* $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu, c)) \subset \mathrm{Mod}(\Lambda(\nu, c))$. *Тогда* $\mathrm{Mod}(\mu) \subset \mathrm{Mod}(\nu)$.

Рассмотрим далее $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$. По лемме 2.3 при каждом $x \in \mathfrak{X}$ отображение $\mu(\cdot, x) \in APM_1$. Поэтому если $\Lambda\big(\mu(\cdot, x), c\big)$ — множество показателей Фурье п. п. по Степанову функции $t \mapsto \langle \mu(t, x), c(u) \rangle$, то

$$\Lambda\big(\mu(\cdot, x)\big) = \bigcup_{c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})} \Lambda(\mu(\cdot, x), c). \tag{2.11}$$

Теперь, принимая во внимание, что $S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ содержится в $S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})\big)$ и определение 1.2 при $\mathfrak{Y} \doteq \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$ (см. также равенство (1.6) при $f = \mu$), множество

$$\Lambda(\mu) \doteq \bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \Lambda\big(\mu(\cdot, x)\big) \overset{(2.11)}{=} \bigcup_{x \in \mathfrak{X}} \bigcup_{c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})} \Lambda(\mu(\cdot, x), c) \tag{2.12}$$

естественно назвать множеством показателей Фурье отображения $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$.

Отметим, что множество $\Lambda(\mu)$ для $\mu \in S\big(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$ не более чем счетно. Это вытекает из равенства

$$\Lambda(\mu) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})} \Lambda(\mu(\cdot, x_j), c),$$

где множество $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathfrak{X}$ является счетным, всюду плотным в $\mathfrak{X}$, и из равенств (2.9) и (1.7), примененных для отображений $\mu(\cdot, x)$ и $(t, x) \mapsto f(t, x) \doteq \langle \mu(t, x), c(u) \rangle$ соответственно.

В дальнейшем важную роль будут играть п. п. последовательности $\{\nu_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$, которые удобно записывать в виде $\{\nu(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$. В соответствии со сказанным в п. 3 первого раздела последовательность $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$ является п. п., если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\mathcal{E}(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}\colon \sup_{m\in\mathbb{Z}} |\nu(m+\mathfrak{n}) - \nu(m)|_w \leqslant \varepsilon\},$$

ее ε — п. п. относительно плотно. Используя лемму 2.1, следствия 1.3 и 1.4, легко видеть, что последовательность $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ п. п. в том и только в том случае, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ (или, что равносильно (см. замечание 2.1) для любой функции $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$) числовая последовательность $\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. Следовательно, если $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — п. п. последовательность, то для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ определено множество

$$\Lambda(\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R}\colon \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \langle \nu(m), c(u)\rangle e^{-i\lambda m} \neq 0\},$$

которое называем множеством показателей Фурье числовой п. п. последовательности $\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}$. При этом если рассмотреть функцию $\nu : \mathbb{R} \to \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ отвечающую п. п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, т. е. такую, что $\nu(t) = \nu(m)$ при всех $t \in [ma, (m+1)a]$ $(a > 0)$, то по теореме 1.3 для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\Lambda(\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}) = a\Lambda(\nu, c) + 2\pi\mathbb{Z},$$

где $\Lambda(\nu, c)$ — множество показателей Фурье п. п. по Степанову отображения $t \to \langle \nu(t), c(u)\rangle$. Откуда по лемме 2.4 получаем, что

$$\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \bigcup_{c\in\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbb{R})} \Lambda(\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}) = a\Lambda(\nu) + 2\pi\mathbb{Z}$$

и в дальнейшем так определенное (не более чем счетное) множество $\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ называем множеством показателей Фурье п. п. последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Отметим, что из данного определения вытекает, что если $\frac{2\pi}{a}$ принадлежит заданному

$\mathrm{Mod}(\Delta)$, $\Delta \subset \mathbb{R}$, то

$$\mathrm{Mod}(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})) \subset a\,\mathrm{Mod}(\Delta)$$

в том и только в том случае, если $\mathrm{Mod}(\nu) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\nu))$ содержится в $\mathrm{Mod}(\Delta)$.

4. В этом пункте покажем, что каждое $\mu \in APM$ можно проаппроксимировать мерозначным тригонометрическим полиномом.

Пусть $\mu \in APM$ и $\mu(t) \sim \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \nu_\lambda \exp(i\lambda t)$ (см. замечание 2.5). В множестве $\Lambda(\mu)$ фиксируем рациональный базис $\{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots\}$, и при каждом $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим меру

$$\sigma_{m;\mathfrak{r}_1\dots\mathfrak{r}_m}(t) \doteq \sum_{\substack{|k_p|\leqslant (m!)^2\\ p=1\dots m}} \prod_{j=1}^{m} \big(1 - \frac{|k_j|}{(m!)^2}\big)\nu_{\frac{k_1}{m!}\mathfrak{r}_1+\dots+\frac{k_m}{m!}\mathfrak{r}_m} \times$$
$$\times \exp\big(i(\frac{k_1}{m!}\mathfrak{r}_1 + \dots + \frac{k_m}{m!}\mathfrak{r}_m)t\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

которая является мерозначным тригонометрическим полиномом. Нам понадобятся также функции $t \mapsto K_{m;\mathfrak{r}_1\dots\mathfrak{r}_m}(t) \in [0,\infty]$, определенные равенством

$$K_{m;\mathfrak{r}_1\dots\mathfrak{r}_m}(t) \doteq K_{(m!)^2}\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{m!}t\right)\cdot\dots\cdot K_{(m!)^2}\left(\frac{\mathfrak{r}_m}{m!}t\right) =$$
$$= \sum_{\substack{|k_p|\leqslant (m!)^2\\ p=1\dots m}} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{|k_j|}{(m!)^2}\right) \exp\big(-i(\frac{k_1}{m!}\mathfrak{r}_1 + \dots + \frac{k_m}{m!}\mathfrak{r}_m)t\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $K_p(\cdot)$ — ядро Фейера порядка p [32. С. 33].

Из равенств (2.6) (см. также замечание 2.5) получаем, что для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\langle \nu_{\frac{k_1}{m!}\mathfrak{r}_1+\dots+\frac{k_m}{m!}\mathfrak{r}_m}, c(u)\rangle =$$
$$= M\{\langle \mu(t), c(u)\rangle \exp\big(-i(\frac{k_1}{m!}\mathfrak{r}_1 + \dots + \frac{k_m}{m!}\mathfrak{r}_m)t\big)\}.$$

Поэтому

$$\langle \sigma_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}(t), c(u)\rangle =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \langle \mu(\xi+t), c(u)\rangle K_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}(\xi)d\xi, \quad t\in\mathbb{R}. \qquad (2.13)$$

Из (2.13) в силу свойств функции $K_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}(\cdot)$ следует, что для всякой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и произвольного $\tau\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} |\langle \sigma_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}(s+\tau) - \sigma_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}(s), c(u)\rangle|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} |\langle \mu_\tau(s) - \mu(s), c(u)\rangle| ds, \qquad (2.14)$$

и, значит, по определению 2.2 множество $\{\sigma_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ равностепенно п. п. (по Степанову).

Т е о р е м а 2.1. *Для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ имеет место равенство*

$$\lim_{m\to\infty}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} |\langle \mu(s) - \sigma_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}(s), c(u)\rangle| ds) = 0. \qquad (2.15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой функции c из $C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ имеем соответствие $\langle \mu(t), c(u)\rangle \sim \sum\limits_{\lambda}\langle \nu_\lambda, c(u)\rangle \exp(i\lambda t)$. Используя равенство (2.13), следуя схеме доказательства соответствующего утверждения для п. п. по Бору функций [29. С. 48], получим, что

$$\lim_{m\to\infty} M\{|\langle \mu(s) - \sigma_{m;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_m}(s), c(u)\rangle|\} = 0. \qquad (2.16)$$

Покажем, что последнее равенство влечет (2.15). Допустим противное. Тогда найдутся константа $\alpha>0$ и последовательности $\{t_j\}_{j=1}^\infty$, $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ такие, что при каждом $j\in\mathbb{N}$ $\int_{t_j}^{t_j+1} f_{m_j}(s)ds > \alpha$, где $f_{m_j}(s) \doteq |\langle \mu(s) - \sigma_{m_j;\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_{m_j}}(s), c(u)\rangle|$. В силу (2.14) последовательность $\{f_{m_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ равностепенно п. п., поэтому найдется такое $l > 0$, что в каждом отрезке $[k\tilde{l} - t_j, k\tilde{l} - t_j + l\,]$, $\tilde{l} \doteq l + 1$ существует $\tau_{kj} \in \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} E_S(f_{m_p}, \alpha/2)$. Поэтому, в силу предыдущих неравенств, получаем, что $\int_{t_j}^{t_j+1} f_{m_j}(s + \tau_{kj})ds > \alpha/2$ при каждом $j \in \mathbb{N}$, а т.к. $k\tilde{l} \leqslant t_j + \tau_{kj} < t_j + \tau_{kj} + 1 \leqslant k\tilde{l} + \tilde{l}$, то при каждом $q \in \mathbb{N}$ и всех $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{q\tilde{l}} \int\limits_0^{q\tilde{l}} f_{m_j}(s)ds = \frac{1}{q\tilde{l}} \sum_{k=0}^{q-1} \int\limits_{k\tilde{l}}^{k\tilde{l}+\tilde{l}} f_{m_j}(s)ds \geqslant \frac{1}{q\tilde{l}} \sum_{k=0}^{q-1} \int\limits_{t_j}^{t_j+1} f_{m_j}(s + \tau_{kj})ds > \frac{\alpha}{2\tilde{l}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty} M\{f_{m_j}(s)\} \geqslant \alpha/2\tilde{l}$, что противоречит (2.16).

С л е д с т в и е 2.1. *Если $\mu \in APM$, то соответствие (2.10) однозначно.*

5. Известно (см., например, [30; 57; 66]), что если отображение $g \in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то для любой функции $u \in B(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ отображение $t \mapsto g(t, u(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Следующая теорема обобщает данное утверждение.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство и множество*

$$\mathfrak{A} = \{\mu(\cdot, x) \in APM,\, x \in \mathfrak{X} \colon \sup_{x\in\mathfrak{X}} \|\mu(\cdot, x)\| \leqslant \xi\} \quad (\xi > 0)$$

равностепенно п. п. Тогда для любой функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ совокупность отображений $t \mapsto f(t, x) \doteq \langle \mu(t, x), g(t, u)\rangle$, $x \in \mathfrak{X}$, где

$$\langle \mu(t, x), g(t, u)\rangle = \int_{\mathfrak{U}} g(t, u)\mu(t, x)(du), \quad (t, x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \qquad (2.17)$$

равностепенно п. п. по Степанову. Кроме того, если функция $\mu \in S\big(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})\big)$, то функция f принадлежит пространству $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$ и ее модуль содержится в $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu) \cup \Lambda(g))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $g \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})\big)$, то по лемме 1.3 для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \omega_\gamma[g(s,\cdot), \mathfrak{U}]ds < \frac{\varepsilon}{3\xi}$. Пусть, далее, $\mathcal{U}_1 \ldots \mathcal{U}_p$ — открытое покрытие компакта $\mathfrak{U}$ такое, что $\operatorname{diam} \mathcal{U}_j \leqslant \gamma$, $j = 1 \ldots p$, и через $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь для каждого $j = 1 \ldots p$ фиксируем точку $u_j \in \mathfrak{U} \bigcap \mathcal{U}_j$, в которой $\alpha_j(u_j) > 0$, и рассмотрим семейство отображений $t \mapsto \lambda_j(t,x) \doteq \langle \mu(t,x), c(u) \rangle \in \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathfrak{X}$. Поскольку множество $\mathfrak{A} \subset APM$ и равностепенно п. п., то при каждом $j = 1 \ldots p$ множество (см. определение 2.2) $\{\lambda_j(\cdot,x),\ x \in \mathfrak{X}\} \subset S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и равностепенно п. п. Кроме того, $\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j(t,x) = \mu(t,x)(\mathfrak{U})$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^p |\lambda_j(t,x)| \leqslant \xi,\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}.$$

Рассмотрим, далее, семейство отображений

$$t \mapsto \Delta(t,x) \doteq \sum_{j=1}^p \lambda_j(t,x)\delta_{u_j} \in \operatorname{rpm}(\mathfrak{U}),\ x \in \mathfrak{X},$$

принадлежащее APM. Для $(\tau,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ положим

$$I(\tau,x) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\langle \Delta(s+\tau,x), g(s+\tau,u) \rangle - \langle \Delta(s,x), g(s,u) \rangle|\, ds,$$

и для каждой функции $g(\cdot,u_j) \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j = 1 \ldots p$, возьмем такую функцию $\mathfrak{g}_j \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что при всех $j = 1 \ldots p$ (здесь см.[53.С. 231]) $\operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\mathfrak{g}_j(t)| \doteq \mathfrak{k}_j < \infty$ и $d(g(\cdot,u_j), \mathfrak{g}_j(\cdot)) < \varepsilon/18p\xi$. Сейчас, полагая $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} \mathfrak{k}_j \doteq \mathfrak{k}$, при всех $(\tau,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, имеем следующие соотношения:

$$I(\tau,x) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \sum_{j=1}^p |\lambda_j(s+\tau,x) - \lambda_j(s,x)| \cdot |g(s,u_j)| ds +$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\sum_{j=1}^{p}|\lambda_j(s+\tau,x)|\cdot|g(s+\tau,u_j)-g(s,u_j)|ds\leqslant$$

$$\leqslant 2\xi\sum_{j=1}^{p}d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{g}_j(\cdot))+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\sum_{j=1}^{p}|\lambda_j(s+\tau,x)-$$

$$-\lambda_j(s,x)|\cdot|\mathfrak{g}_j(s)|ds+\xi\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(s+\tau,u)-g(s,u)|ds<\frac{\varepsilon}{9}+$$

$$+\mathfrak{k}\sum_{j=1}^{p}\sup_{x\in\mathfrak{X}}d\big(\lambda_j(\cdot+\tau,x),\lambda_j(\cdot,x)\big)+$$

$$+\xi\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(s+\tau,u)-g(s,u)|ds,$$

откуда для всякого τ, принадлежащего относительно плотному множеству[2]

$$\mathcal{E}\doteq\Big(\bigcap_{u\in\mathfrak{U}}E_S(g(\cdot,u),\mathfrak{y})\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}}\bigcap_{j=1}^{p}E_S\big(\lambda_j(\cdot,x),\mathfrak{y}\big)\Big),$$

где $\mathfrak{y}\doteq\min\{\varepsilon/9\xi,\varepsilon/9\mathfrak{k}p\}$, получаем неравенство $\sup\limits_{x\in\mathfrak{X}}I(\tau,x)\leqslant\varepsilon/3$. Теперь если $\tau\in\mathcal{E}$, то при всех $x\in\mathfrak{X}$ имеем

$$d(f_\tau(\cdot,x),f(\cdot,x))\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x)-\Delta(s,x),g(s,u)\rangle|ds+\sup_{x\in\mathfrak{X}}I(\tau,x)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x),g(s,u)\rangle-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j(s,x)g(s,u_j)|ds+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant$$

[2]Здесь мы пользуемся следующим несложно доказываемым утверждением: если множества $\{\mathfrak{f}^1_\alpha,\,\alpha\in\mathbb{A}\},\{\mathfrak{f}^2_\beta,\,\beta\in\mathbb{B}\}\subset S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и равностепенно п. п., то для любого $\varepsilon>0$ множество $(\bigcap\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}E_S(\mathfrak{f}^1_\alpha,\varepsilon))\bigcap(\bigcap\limits_{\beta\in\mathbb{B}}E_S(\mathfrak{f}^2_\beta,\varepsilon))$ не пусто и относительно плотно.

$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\bigl(\sum_{j=1}^{p}\int_{u\in\mathfrak{U}}\alpha_j(u)|g(s,u)-g(s,u_j)|\cdot|\mu(s,x)|(du)\bigr)ds+\frac{\varepsilon}{3}\leqslant$$

$$\leqslant 2\xi\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,$$

т. е. $\tau\in\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}}E_S(f(\cdot,x),\varepsilon)$, тем самым первое утверждение теоремы 2.2 доказано.

Пусть теперь $\mu\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$. Тогда по лемме 2.2 функция $\lambda_j\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$, $j=1\dots p$ и, следовательно, найдется такое $\widehat{\gamma}\in(0,\gamma)$, что при всех $\beta\in(0,\widehat{\gamma})$ $\mathfrak{d}_\beta[\lambda_j,\mathfrak{X}]<2\varepsilon/9p\mathfrak{k}$. При этих β получаем, что

$$\mathfrak{d}_\beta[f,\mathfrak{X}]\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds+$$

$$+2\sum_{j=1}^{p}d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{g}_j(\cdot))+\mathfrak{k}\sum_{j=1}^{p}\mathfrak{d}_\beta[\lambda_j,\mathfrak{X}]<\varepsilon,$$

откуда в силу определения 1.1 вытекает, что $f\in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$. Далее, при каждом $x\in\mathfrak{X}$ имеем следующие соотношения:

$$\Lambda(f(\cdot,x))\subset\mathrm{Mod}\bigl(\Lambda(f(\cdot,x))\bigr)\subset$$

$$\subset\mathrm{Mod}\bigl((\bigcup_{u\in\mathfrak{U}}\Lambda(g(\cdot,u)))\bigcup(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\bigcup_{j=1}^{p}\Lambda(\lambda_j(\cdot,u)))\bigr)\subset$$

$$\subset\mathrm{Mod}\bigl(\Lambda(g)\bigcup(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(\mu(\cdot,x),c))\bigr)\overset{(2.12)}{=}\mathrm{Mod}\bigl(\Lambda(g)\bigcup\Lambda(f)\bigr).$$

Следовательно,

$$\mathrm{Mod}(f)\doteq\mathrm{Mod}\bigl(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(f(\cdot,x))\bigr)\subset\mathrm{Mod}\bigl(\Lambda(g)\bigcup\Lambda(\mu)\bigr),$$

и тем самым теорема 2.2 доказана.

З а м е ч а н и е 2.6. Аналогичное теореме 2.2 утверждение при условии, равностепенной почти периодичности множества $\mathfrak{A} \doteq \{\mu(\cdot, x), x \in \mathfrak{X}\} \subset APM_1$ доказано в [44] (см. также [67]).

Имеет место следующая

Л е м м а 2.6. *Функция* $u \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ *в том и только в том случае, если отображение* $(t, x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$ *принадлежит* $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *и их модули совпадают.*

Доказательство леммы 2.6 вытекает из определения 1.1, утверждения лемм 2.2 и 2.3, а также из неравенства (см. обозначение (1.4))

$$\sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathfrak{X} \\ \rho(x_1, x_2) \leqslant \gamma}} (\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |c(u(s, x_1)) - c(u(s, x_2))| ds) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sigma} \|c\|_{C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})} \mathfrak{d}_\gamma[u, \mathfrak{X}] + \omega_\sigma[c, \mathfrak{U}],$$

справедливого для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и фиксированных констант $\sigma, \gamma > 0$.

Из лемм 2.6 и теоремы 2.2 вытекает

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$. *Тогда для всякого* $u \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ *отображение* $(t, x) \mapsto g(t, u(t, x))$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$ *и его модуль содержится в* $\mathrm{Mod}\big(\Lambda(g) \bigcup \Lambda(u)\big)$.

С л е д с т в и е 2.3. *Пусть* $g \colon \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ *принадлежит либо пространству* $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, *либо* $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$. *Тогда для всякого* $\mu \in APM_1$ *и любого* $u \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ *отображения* $t \mapsto \langle \mu(t), g(t, u) \rangle$, $t \mapsto g(t, u(t))$ *принадлежат пространству* $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *и их модули содержатся в* $\mathrm{Mod}\big(\Lambda(\mu) \bigcup \Lambda(g)\big)$ *и* $\mathrm{Mod}\big(\Lambda(g) \bigcup \Lambda(u)\big)$ *соответственно.*

В дальнейшем нам понадобится еще ряд утверждений и определений, связанных с мерозначными п. п. функциями.

6. Имеет место следующая

Т е о р е м а 2.3. *Пусть* $(\mathfrak{X},\rho)$ — *компактное метрическое пространство, множество отображений* $\mathfrak{A} \doteq \{\mu(\cdot,x), x\in\mathfrak{X}\}$ *из* APM_1 *равностепенно п. п. и* $\lim\limits_{x\to\widehat{x}} \|\mu(\cdot,x)-\mu(\cdot,\widehat{x})\|_w = 0$. *Тогда для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ *имеют место равенства*

$$\lim_{x\to\widehat{x}}(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_t^{t+1} \langle\mu(s,x)-\mu(s,\widehat{x}), g(s,u)\rangle ds|) = 0, \tag{2.18}$$

$$\lim_{x\to\widehat{x}} M\{\langle\mu(t,x), g(t,u)\rangle\} = M\{\langle\mu(t,\widehat{x}), g(t,u)\rangle\}. \tag{2.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (2.19) вытекает из равенства (2.18), которое докажем методом от противного. В этом случае найдутся такая константа $\alpha > 0$ и последовательности $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{X}$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = \widehat{x}$, $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, что при всех $j \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$|\int_{t_j}^{t_j+1} (f_j(s) - \widehat{f}(s))ds| > \alpha, \tag{2.20}$$

где $f_j(s) \doteq \langle\mu(s,x_j), g(s,u)\rangle$, $j \in \mathbb{N}$, $\widehat{f}(s) \doteq \langle\mu(s,\widehat{x}), g(s,u)\rangle$, $s \in \mathbb{R}$. По теореме 2.2 множество функций (здесь см. (2.17)) $\{t \mapsto f(t,x) \doteq \langle\mu(t,x), g(t,u)\rangle,\ x \in \mathfrak{X}\}$ равностепенно п. п. Поэтому найдется такое $l > 0$, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ существует точка $\tau_j \in [-t_j, -t_j + l] \bigcap \big(\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} E_S(f(\cdot,x), \alpha/16)\big)$. Так как последовательность $\{t_j + \tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0,l]$, то без ограничения общности можно считать, что $\lim\limits_{j\to\infty}(t_j + \tau_j) = \widehat{t} \in [0,l]$. Далее, т.к. $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ (см. п. 1 из первого раздела), то отображение $t \mapsto \mathfrak{g}(t) \doteq \max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |g(t,u)|$ принадлежит $L_1([0,l+2],\mathbb{R})$. Поэтому в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега [36, с. 101] для константы $\alpha/24$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $E \subset [0,l+2]$ будет выполнено неравенство $|\int_E \mathfrak{g}(t)dt| < \alpha/24$, если $\operatorname{mes} E \leqslant \delta$, а поскольку $\mathfrak{y}_j \doteq (t_j + \tau_j - \widehat{t}\,) \to 0$ при $j \to \infty$, то найдется такое $j_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $j \geqslant j_1$ $|\mathfrak{y}_j| \leqslant \delta$. Следовательно, при этих j $|\int_{\widehat{t}+\mathfrak{y}_j}^{\widehat{t}}\mathfrak{g}(s)ds|<\alpha/24$, $|\int_{\widehat{t}+1}^{\widehat{t}+1+\mathfrak{y}_j}\mathfrak{g}(s)ds|<\alpha/24$. Далее, поскольку $\lim\limits_{j\to\infty}\|\mu(\cdot,x_j)-\mu(\cdot,\widehat{x})\|_w=0$, то существует такое $j_2\in\mathbb{N}$, что при всех $k,j\geqslant j_2$ будет выполнено неравенство $|\int_{\widehat{t}}^{\widehat{t}+1}(f_k(s)-f_j(s))ds|<\frac{\alpha}{12}$, и для всякого фиксированного $j\in\mathbb{N}$ существует такое $k(j)\in\mathbb{N}$, начиная с которого $|\int_{t_j}^{t_j+1}(\widehat{f}(s)-f_k(s))ds|<\frac{\alpha}{12}$. Теперь при $j\geqslant j_0\doteq\max(j_1,j_2)$ и $k\geqslant\max(k(j),j_0)$, учитывая выбор точек τ_j, получаем следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\Big|\int_{t_j}^{t_j+1}(\widehat{f}(s)-f_j(s))\,ds\Big|\leqslant\\
\leqslant\Big|\int_{t_j}^{t_j+1}(\widehat{f}(s)-f_k(s))\,ds\Big|+d(f_k(\cdot+\tau_j),f_k(\cdot))+\\
+2\cdot\Big|\int_{\widehat{t}+\mathfrak{y}_j}^{\widehat{t}}\mathfrak{g}(s)\,ds\Big|+\Big|\int_{\widehat{t}}^{\widehat{t}+1}(f_k(s)-f_j(s))\,ds\Big|+\\
+2\cdot\Big|\int_{\widehat{t}+1}^{\widehat{t}+1+\mathfrak{y}_j}\mathfrak{g}(s)\,ds\Big|+d(f_j(\cdot+\tau_j),f_j(\cdot))<\alpha/2.
\end{gathered}
$$

Отсюда получаем противоречие с неравенствами (2.20), и тем самым равенство (2.18) доказано.

7. Введем для отображения $\mu(\cdot)\in APM_1$ при фиксированном $h>0$ его стекловское усреднение. С этой целью при каждом $t\in\mathbb{R}$ рассмотрим функционал

$$
c(\cdot)\mapsto\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle\mu(s),c(u)\rangle\,ds,\quad c(\cdot)\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R}),
$$

который, как легко видеть, принадлежит $\big(C(\mathfrak{U},\mathbb{R})\big)^*$. Поэтому по теореме Рисса [36], с учетом того, что $\mu(\cdot)\in APM_1\subset\mathcal{M}_1$, вытекает существование меры $\mu(t,h)\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ такой, что для каждой функции $c(\cdot)\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ будет выполняться равенство

$$
\langle\mu(t,h),c(u)\rangle=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle\mu(s),c(u)\rangle ds,\ t\in\mathbb{R}.\qquad(2.21)
$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Пусть $\mu(\cdot) \in APM_1$. Тогда непрерывное отображение $t \mapsto \mu(t,h) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, удовлетворяющее при каждом $t \in \mathbb{R}$ и всякой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ равенству (2.21), называется стекловским усреднением для $\mu(\cdot)$.

Л е м м а 2.7. *Пусть $\mu(\cdot) \in APM_1$. Тогда при каждом $h \in (0,1]$ отображение $\mu(\cdot,h) \in B(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и его модуль $\mathrm{Mod}(\mu(\cdot,h))$ содержится в $\mathrm{Mod}(\mu(\cdot))$. Кроме того, множество $\mathcal{F} \doteq \{\mu(\cdot,h),\, h \in (0,1]\}$ равностепенно п. п. по Степанову и*

$$\lim_{h\downarrow 0} \|\mu(\cdot) - \mu(\cdot,h)\|_w = 0. \tag{2.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $\tau \in \mathbb{R}$ и любой функции $c \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ из (2.21) вытекает неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau,h;c) - f(t,h;c)| \leqslant d_h(f(\cdot+\tau;c), f(\cdot;c)),$$

где $f(t;c) \doteq \langle \mu(t), c(u)\rangle$, $f(t,h;c) \doteq \langle \mu(t,h), c(u)\rangle$, $t \in \mathbb{R}$, из которого (см. определения 2.1, лемму 2.5, равенство (2.8) и замечание 2.2) получаем, что $\mu(\cdot,h) \in B(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, и его модуль содержится в $\mathrm{Mod}(\mu)$. Непосредственно из определений 2.1 и 2.4 получаем, что п. п. по Бору функция $f(\cdot,h;c)$ является стекловским усреднением [31. С. 206] для $f(\cdot;c) \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Поэтому [31. С. 206, 207] для каждой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$

$$\lim_{h\downarrow 0} d(f(\cdot,h;c), f(\cdot;c)) = 0, \tag{2.23}$$

и для всякого $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}$ имеет место следующее неравенство:

$$\sup_{h\in(0,1]} d(f(\cdot+\mathfrak{y},h;c), f(\cdot,h;c)) \leqslant 2d(f(\cdot+\mathfrak{y};c), f(\cdot;c)),$$

из которого вытекает равностепенная п. п. множества $\mathcal{F}$. В свою очередь, из предельного равенства (2.23), определения $\|\cdot\|_w$, учитывая, что при каждом $\mathbb{T} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R})$ множество $\Upsilon(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ (см. (1.9)) всюду плотно в $\mathfrak{V}_1(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, получаем равенство (2.22).

Из теоремы 2.3 и леммы 2.7 вытекает

Т е о р е м а 2.4. *Пусть отображение* $\mu(\cdot) \in APM_1$ *и* $\mu(\cdot, h) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *— его стекловское усреднение. Тогда для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$

$$\lim_{h\downarrow 0}(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_t^{t+1} \langle \mu(s,h) - \mu(s), g(s,u)\rangle ds|) = 0, \tag{2.24}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{h\downarrow 0} M\{\langle \mu(t,h), g(t,u)\rangle\} = M\{\langle \mu(t), g(t,u)\rangle\}$.

3. Аппроксимационная теорема

1. В этом разделе доказывается следующая — аппроксимационная теорема в почти периодическом случае.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $(\mathfrak{X}, \rho)$ *— компактное метрическое пространство. Тогда для каждого отображения* $\mu(\cdot)$, *принадлежащего* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *существует такая последовательность функций* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *из пространства* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$, *что для всех* $j \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Mod}(u_j) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$ *и обладающая также следующими свойствами:*

1) *имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{x\in\mathfrak{X}} \|\mu(\cdot, x) - \delta_{u_j(\cdot,x)}\|_w) = 0; \tag{3.1}$$

2) *при каждом* $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}} \Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\delta_{u_j(s,x_1)} - \delta_{u_j(s,x_2)}|(\mathfrak{U})\, ds\Big)\Big) = 0; \tag{3.2}$$

3) *для всякой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$

$$\begin{cases} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left|\int_t^{t+1} \langle \mu(s,x) - \delta_{u_j(s,x)}, g(s,u)\rangle\, ds\right| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0 \ \text{при } j\to\infty, \\ M\{g(t, u_j(t,x))\} \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} M\{\langle \mu(t,x), g(t,u)\rangle\} \ \text{при } j\to\infty. \end{cases} \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ строим такое открытое покрытие $\mathcal{U}_1^{(j)} \dots \mathcal{U}_{p_j}^{(j)}$ компакта $\mathfrak{U}$, что

$$\max\{\operatorname{diam} \mathcal{U}_k^{(j)}, k = 1 \dots p_j\} \leqslant \frac{1}{j}$$

и через $\{\alpha_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь для каждого $k = 1 \dots p_j$ зафиксируем точку $u_k^{(j)} \in \mathfrak{U} \bigcap \mathcal{U}_k^{(j)}$, в которой $\alpha_k^{(j)}(u_k^{(j)}) > 0$, и рассмотрим отображение

$$(t,x) \mapsto \lambda_k^{(j)}(t,x) \doteq \langle \mu(t,x), \alpha_k^{(j)}(u) \rangle \in [0,1], \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}. \tag{3.4}$$

Поскольку $\mu \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))$, то по лемме 2.3 для всех $k = 1 \dots p_j$ $\lambda_k^{(j)} \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$, и при этом

$$\sum_{k=1}^{p_j} \lambda_k^{(j)}(t,x) = 1, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}. \tag{3.5}$$

Выбираем, далее, число $a > 0$ таким, чтобы $\frac{4\pi}{a} \in \operatorname{Mod}(\mu)$, и отрезок $[0,a]$ разбиваем на j отрезков $I_l^{(j)} \doteq \left[\frac{l-1}{j}a, \frac{l}{j}a\right]$, $l = 1 \dots j$. В свою очередь, каждый отрезок $I_l^{(j)}$ разбиваем на p_j подотрезков $I_{l_k}^{(j)}(\xi,x)$, $k = 1 \dots p_j$, $(\xi,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, определенных равенствами

$$\begin{cases} I_{l_1}^{(j)}(\xi,x) \doteq \frac{l-1}{j}a + [0, \int\limits_{I_l^{(j)}} \lambda_1^{(j)}(t+\xi,x)\,dt], \\ I_{l_k}^{(j)}(\xi,x) \doteq \frac{l-1}{j}a + [\sum\limits_{s=1}^{k-1} \int\limits_{I_l^{(j)}} \lambda_s^{(j)}(t+\xi,x)\,dt, \sum\limits_{s=1}^{k} \int\limits_{I_l^{(j)}} \lambda_s^{(j)}(t+\xi,x)dt], \\ 2 \leqslant k \leqslant p_j. \end{cases} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что отрезки $I_{l_1}^{(j)}(\xi,x) \dots I_{l_{p_j}}^{(j)}(\xi,x)$ примыкают друг к другу, и при каждом $l = 1 \dots j$ в силу (3.5)

$$I_l^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{p_j} I_{l_k}^{(j)}(\xi,x), \ (\xi,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим далее при каждом $j \in \mathbb{N}$ последовательность отображений $w_m^{(j)}: [0,a] \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$, $m \in \mathbb{Z}$, определенную для всякого $m \in \mathbb{Z}$ равенством

$$w_m^{(j)}(t,x) \doteq \sum_{l=1}^{j} \chi_{I_l^{(j)}}(t) \sum_{k=1}^{p_j} \chi_{I_{l_k}^{(j)}(ma,x)}(t) u_k^{(j)}, \ (t,x) \in [0,a] \times \mathfrak{X}, \quad (3.8)$$

где $I_{l_k}^{(j)}(ma,x)$, $k = 1 \dots p_j$, задаются равенством (3.6) при $\xi = ma$.

Л е м м а 3.1. *При каждом* $j \in \mathbb{N}$ *последовательность* $\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *отображений, заданная равенством* (3.8), *является п. п. равномерно по* $x \in \mathfrak{X}$ *и справедливо включение*

$$\mathrm{Mod}(\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset a\,\mathrm{Mod}(\mu) + 2\pi\mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку совокупность функций $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j} \subset S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$, то по теореме 1.1 и по лемме 1.5 для заданного $\varepsilon > 0$ множество

$$a\mathbb{Z} \bigcap \Big(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \bigcap_{k=1}^{p_j} E_{S_a}(\lambda_k^{(j)}(\cdot,x),\delta),$$

где $\delta \doteq \varepsilon/2\gamma a p_j^2$, $\gamma \doteq \max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |u|$, не пусто и относительно плотно. Пусть $\mathfrak{n}a$ принадлежит этому множеству. Тогда для всех $x \in \mathfrak{X}$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^a |w_{m+\mathfrak{n}}^{(j)}(t,x) - w_m^{(j)}(t,x)|\,dt \overset{(3.8)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \gamma \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{j} \sum_{k=1}^{p_j} \int_{I_l^{(j)}} |\chi_{I_{l_k}^{(j)}((m+\mathfrak{n})a,x)}(t) - \chi_{I_{l_k}^{(j)}(ma,x)}(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{j} \sum_{k=1}^{p_j} \mathrm{mes}(I_{l_k}^{(j)}((m+\mathfrak{n})a,x) \triangle I_{l_k}^{(j)}(ma,x)) \overset{(3.6)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2\gamma p_j \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{p_j} \sum_{l=1}^{j} \int_{I_l^{(j)}} |\lambda_s^{(j)}(t+(m+\mathfrak{n})a,x) - \lambda_s^{(j)}(t+ma,x)|dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma p_j \sum_{s=1}^{p_j} \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{ma}^{(m+1)a} |\lambda_s^{(j)}(t+\mathfrak{n}a,x) - \lambda_s^{(j)}(t,x)|dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma p_j a \sum_{s=1}^{p_j} d_a(\lambda_s^{(j)}(\cdot+\mathfrak{n}a,x), \lambda_s^{(j)}(\cdot,x)) < \varepsilon,$$

т. е. $\mathfrak{n} \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathcal{E}(\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon)$. Следовательно, если $\{\lambda_{k,m}^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ последовательность отображений, отвечающая функции $\lambda_k^{(j)} \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathbb{R})$ (см. следствие 1.4), то имеем включение

$$\bigcap_{k=1}^{p_j} \bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \mathcal{E}(\{\lambda_{k,m}^{(j)}(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \delta) \subset \bigcap_{x\in\mathfrak{X}} \mathcal{E}(\{w_m^{(j)}(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon). \tag{3.10}$$

Аналогично показываем, что при каждом $\mathfrak{r} > 0$

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{r}}[\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}, \mathfrak{X}] \leqslant 2\gamma p_j \varrho(a) \sum_{s=1}^{p_j} \mathfrak{d}_{\mathfrak{r}}[\lambda_s^{(j)}, \mathfrak{X}],$$

где (см. неравенства (1.1))

$$\varrho(a) = \begin{cases} 1, \text{ если } \ a \leqslant 1, \\ 2a, \text{ если } \ a > 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{\mathfrak{r}\downarrow 0} \mathfrak{d}_{\mathfrak{r}}[\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}, \mathfrak{X}] = 0$. Таким образом по определению 1.4 последовательность $\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. равномерно по $x \in \mathfrak{X}$.

Из (3.4) и (2.12) следует, что

$$\bigcup_{k=1}^{p_j} \Lambda(\lambda_k^{(j)}) \subset \Lambda(\mu). \tag{3.12}$$

Наконец, в силу (3.10), а также теоремы 1.3 и равенства (1.6), примененных к функциям $\lambda_k^{(j)}$, $k = 1 \dots p_j$, получаем

$$\mathrm{Mod}(\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}) \doteq \mathrm{Mod}\big(\Lambda(\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) \doteq$$
$$\doteq \mathrm{Mod}\big(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda(\{w_m^{(j)}(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) \subset$$
$$\subset \mathrm{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \Lambda(\{\lambda_{k,m}^{(j)}(\cdot,x)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) \doteq \mathrm{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j} \Lambda(\{\lambda_{k,m}^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}})\big) =$$
$$= \mathrm{Mod}\big(a\bigcup_{k=1}^{p_j} \Lambda(\lambda_k^{(j)}) + 2\pi\mathbb{Z}\big) \subset a\,\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu)) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Теперь при каждом $j \in \mathbb{N}$ по последовательности $\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений (3.8) строим функцию $u_j\colon \mathbb{R}\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}$, которая на каждом множестве $[ma,(m+1)a]\times\mathfrak{X}$, $m\in\mathbb{Z}$, задается следующим образом:

$$u_j(t+ma,x) \doteq w_m^{(j)}(t,x), \quad (t,x)\in[0,a]\times\mathfrak{X}. \tag{3.13}$$

Из лемм 3.1 и 1.6 получаем, что $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{U})$. Кроме того, при каждом $j\in\mathbb{N}$ $\mathrm{Mod}(u_j)\subset\mathrm{Mod}(\mu)$. В самом деле, учитывая выбор числа $a>0$ и включение (3.9), имеем следующие соотношения:

$$\mathrm{Mod}(u_j) = a^{-1}\,\mathrm{Mod}(\{w_m^{(j)}\}_{m\in\mathbb{Z}}) + 2\pi a^{-1}\mathbb{Z} \subset$$
$$\subset a^{-1}(a\,\mathrm{Mod}(\mu)+2\pi\mathbb{Z}) + 2\pi a^{-1}\mathbb{Z} = \mathrm{Mod}(\mu) + 4\pi a^{-1}\mathbb{Z} = \mathrm{Mod}(\mu).$$

Покажем, что построенная последовательность функций $\{u\}_{j=1}^{\infty}$ является искомой. Для этого нам понадобится еще последовательность $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящая из отображений (см.(3.4), (3.5))

$$(t,x)\mapsto\Delta_j(t,x)\doteq\sum_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t,x)\delta_{u_k^{(j)}}\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \tag{3.14}$$

определенных на $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$.

Л е м м а 3.2. *При каждом* $j \in \mathbb{N}$ $\Delta_j \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *и* $\mathrm{Mod}(\Delta_j) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, $\mathfrak{k} \doteq \|c\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}$ и при каждом j полагаем $f_c^{(j)}(t,x) \doteq \langle \Delta_j(t,x), c(u)\rangle$, $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X}$. Тогда из (3.14) вытекают неравенства:

$$d(f_c^{(j)}(\cdot+\tau,x), f_c^{(j)}(\cdot,x)) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{k}\sum_{k=1}^{p_j} d(\lambda_k^{(j)}(\cdot+\tau,x), \lambda_k^{(j)}(\cdot,x)),\ \ \tau\in\mathbb{R},\ x\in\mathfrak{X},$$

$$\mathfrak{d}_\gamma[f_c^{(j)}, \mathfrak{X}] \leqslant \mathfrak{k}\sum_{k=1}^{p_j}\mathfrak{d}_\gamma[\lambda_k^{(j)}, \mathfrak{X}].$$

Используя эти неравенства, а также лемму 2.3 и включение $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j} \subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathbb{R})$, получим, что $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$. Далее, используя первое из указанных неравенств, показываем, что для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и всяком $x \in \mathfrak{X}$

$$\mathrm{Mod}\big(f_c^{(j)}(\cdot,x)\big) \subset \mathrm{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j}\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(\lambda_k^{(j)}(\cdot,x))\big) \doteq$$

$$\doteq \mathrm{Mod}\big(\bigcup_{k=1}^{p_j}\Lambda(\lambda_k^{(j)})\big) \overset{(3.12)}{\subset} \mathrm{Mod}(\mu),$$

откуда по лемме 2.5 $\mathrm{Mod}(\Delta_j(\cdot,x)) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$, $x \in \mathfrak{X}$, и, следовательно, $\mathrm{Mod}(\Delta_j) \doteq \mathrm{Mod}(\bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}}\Delta_j(\cdot,x)) \subset \mathrm{Mod}(\mu)$.

Л е м м а 3.3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty}(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\|\mu(\cdot,x)-\Delta_j(\cdot,x)\|_w) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для каждой функции φ, принадлежащей $\mathfrak{V}_1 \doteq \mathfrak{V}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ (см. (2.17)),

$$\Big|\int_{\mathbb{R}}\langle\Delta_j(t,x)-\mu(t,x), \varphi(t,u)\rangle\,dt\Big| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty. \qquad (3.15)$$

Действительно, т.к. $\mu(t,x) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, то

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} \langle \Delta_j(t,x) - \mu(t,x), \varphi(t,u)\rangle\, dt\Big| \overset{(3.15)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{k=1}^{p_j} \lambda_k^{(j)}(t,x)\varphi(t,u_k^{(j)}) - \int_{\mathfrak{U}} \varphi(t,u)\mu(t,x)(du)\Big|\, dt \overset{(3.4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k=1}^{p_j} \int_{\mathfrak{U}} \alpha_k^{(j)}(u)|\varphi(t,u_k^{(j)}) - \varphi(t,u)|\mu(t,x)(du)\Big)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}]\, dt.$$

Так как $\varphi \in \mathfrak{V}_1$, то для п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}] \downarrow 0$ при $j \to \infty$ и, кроме того, $|\omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}]| \leqslant 2\psi_\varphi(t)$, где $\psi_\varphi(\cdot) \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знак интеграла [36. С. 112] $\lim\limits_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \omega_{\frac{1}{j}}[\varphi(t,\cdot),\mathfrak{U}]dt = 0$ и, следовательно, в силу приведенных выше соотношений, справедливо предельное соотношение (3.15), откуда, в свою очередь (см. п.1 из второго раздела), получаем утверждение леммы 3.3.

Л е м м а 3.4. *Имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty} (\sup_{x\in\mathfrak{X}} \|\Delta_j(\cdot,x) - \delta_{u_j(\cdot,x)}\|_w) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем

$$\eta_j(t,x) \doteq \Delta_j(t,x) - \delta_{u_j(\cdot,x)},\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}.$$

Поскольку $\|\eta_j(t,x)\| \leqslant 2$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, то для произвольно фиксированной функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1$ и заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathfrak{X}} \Big|\int_{\mathbb{R}} \langle \eta_j(t,x), \varphi(t,u)\rangle\, dt\Big| \leqslant \sup_{x\in\mathfrak{X}} \Big|\int_{-na}^{na} \langle \eta_j(t,x), \varphi(t,u)\rangle\, dt\Big| + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.16)$$

Покажем далее, что

$$\lim_{j\to\infty}\Bigl(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Bigl|\int_{-na}^{na}\langle\eta_j(t,x),\varphi(t,u)\rangle\,dt\Bigr|\Bigr)=0. \tag{3.17}$$

Отметим, что т. к. множество $\Upsilon([-na,na]\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ (см. (1.9)) всюду плотно в пространстве $\mathfrak{V}_1([-na,na]\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то для доказательства равенства (3.17) достаточно показать, что для любых $g\in C([-na,na],\mathbb{R})$ и $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$

$$\lim_{j\to\infty}\Bigl(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Bigl|\int_{-na}^{na}g(t)\langle\eta_j(t,x),c(u)\rangle\,dt\Bigr|\Bigr)=0. \tag{3.18}$$

В свою очередь, и для доказательства равенства (3.18), и в дальнейшем нам понадобится

Л е м м а 3.5. *Пусть точки* $t_l^{(j)}\in I_l^{(j)}\doteq\left[\frac{l-1}{j}a,\frac{l}{j}a\right]$, $l=1\ldots j$ *и функция* $\varphi\in\mathfrak{V}_1^{lok}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$. *Тогда для всех точек* $(m,x)\in\mathbb{Z}\times\mathfrak{X}$ *имеет место равенство*

$$\sum_{l=1}^{j}\int_{I_l^{(j)}}\langle\eta_j(t+ma,x),\varphi(t_l^{(j)}+ma,u)\rangle\,dt=0. \tag{3.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (3.7), а также определения отображения $(t,x)\mapsto\eta_j(t,x)$ (см. (3.8), (3.13) и (3.14)) получаем при каждом $x\in\mathfrak{X}$ следующую цепочку равенств:

$$\sum_{l=1}^{j}\int\limits_{I_l^{(j)}}\langle\eta_j(t+ma,x),\varphi(t_l^{(j)}+ma,u)\rangle dt=$$

$$=\sum_{l=1}^{j}(\int\limits_{I_l^{(j)}}\sum_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t+ma,x)\varphi(t_l^{(j)}+ma,u_k^{(j)})\,dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{p_j}\int\limits_{I_{l_k}^{(j)}(ma,x)}\varphi(t_l^{(j)}+ma,u_k^{(j)})dt\big)=\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{p_j}\big(\int\limits_{I_l^{(j)}}\lambda_k^{(j)}(t+ma,x)dt-$$

$$-\operatorname{mes}I_{l_k}^{(j)}(ma,x)\big)\varphi(t_l^{(j)}+ma,u_k^{(j)})\overset{(3.6)}{=}0.$$

Используя лемму 3.5 для $\varphi(t,u)\doteq g(t)c(u)$, получаем

$$\int_0^{na}g(t)\langle\eta_j(t,x),c(u)\rangle dt=\sum_{m=0}^{n-1}g(t+ma)\langle\eta_j(t+ma,x),c(u)\rangle dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{j}\int_{I_l^{(j)}}(g(t+ma)-g(t_l^{(j)}+ma))\langle\eta_j(t+ma,x),c(u)\rangle dt.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\operatorname{mes}I_l^{(j)}=a/j$ и функция $g\in C([-na,na],\mathbb{R})$ (а значит, ее колебание $\omega_{\frac{a}{j}}[g,[0,na]]$ на $[0,na]$ стремится к нулю при $j\to\infty$), вытекает, что

$$\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_0^{na}g(t)\langle\eta_j(t,x),c(u)\rangle dt\Big|\leqslant$$

$$\leqslant 2na\|c\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}\cdot\omega_{\frac{a}{j}}[g,[0,na]]\downarrow 0\quad\text{при}\quad j\to\infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_0^{na}g(t)\langle\eta_j(t,x),c(u)\rangle\,dt\Big|\Big)=0.$$

Аналогично показываем, что

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_{-na}^{0}g(t)\langle\eta_j(t,x),c(u)\rangle dt\Big|\Big)=0.$$

Из последних двух равенств получаем равенство (3.18), а стало быть, как отмечалось, и (3.17). Теперь из (3.17) и неравенства

(3.16) вытекает, что при всех j, начиная с некоторого,

$$\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_{\mathbb{R}}\langle\eta_j(t,x),\varphi(t,u)\rangle\,dt\Big|\leqslant\varepsilon.$$

Следовательно, доказано, что для каждой функции $\varphi\in\mathfrak{V}_1$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{x\in\mathfrak{X}}\Big|\int_{\mathbb{R}}\langle\eta_j(t,x),\varphi(t,u)\rangle\,dt\Big|\Big)=0,$$

что и завершает доказательство леммы 3.4.

Из доказанных лемм 3.3 и 3.4 вытекает равенство (3.1).

2. Для доказательства равенства (3.2), для всех $(j,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ и $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, введем в рассмотрение измеримые множества

$$\Xi_j^{(m)}(x_1,x_2)\doteq\{t\in[0,a]\colon\ |u_j(t+ma,x_1)-u_j(t+ma,x_2)|>0\},$$

совпадающие с $\{t\in[0,a]:\ |\delta_{u_j(t+ma,x_1)}-\delta_{u_j(t+ma,x_2)}|(\mathfrak{U})>0\}$. Имеем далее, при всех $x_1,x_2\in\mathfrak{X}$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma$ и $m\in\mathbb{Z}$,

$$\operatorname{mes}\Xi_j^{(m)}(x_1,x_2)=\sum_{l=1}^{j}\operatorname{mes}(\Xi_j^{(m)}(x_1,x_2)\cap I_l^{(j)})\overset{(3.7)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{p_j}\operatorname{mes}(I_{l_k}^{(j)}(ma,x_1)\triangle I_{l_k}^{(j)}(ma,x_2))\overset{(3.6)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2p_j\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{p_j}\int_{I_l^{(j)}}|\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_1)-\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_2)|ds\leqslant$$

$$\leqslant 2p_j\sum_{k=1}^{p_j}\Big(\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_1)-\lambda_k^{(j)}(s+ma,x_2)|ds)\Big).$$

Поэтому в силу неравенств (1.1) и обозначения (3.11) при каждом $j\in\mathbb{N}$ получаем, что

$$\Big(\sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathfrak{X}\\ \rho(x_1,x_2)\leqslant\gamma}}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\delta_{u_j(t+ma,x_1)}-\delta_{u_j(t+ma,x_2)}|(\mathfrak{U})ds\Big)\leqslant$$

$$\leqslant 8p_j\varrho(a)\sum_{k=1}^{p_j}\mathfrak{d}_\gamma[\lambda_k^{(j)},\mathfrak{X}].$$

Теперь равенство (3.2) вытекает из эквивалентности d_l-расстояний и включения $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}\subset S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathbb{R})$.

3. Фиксируем произвольную функцию $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$.

Л е м м а 3.6. *Имеет место следующее предельное соотношение:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x)-\Delta_j(s,x),g(s,u)\rangle|\,ds\underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows}0 \text{ при } j\to\infty. \quad (3.20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mu(t,x)\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ при $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$, то для всех $x\in\mathfrak{X}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\langle\mu(s,x)-\Delta_j(s,x),g(s,u)\rangle|ds\overset{(3.14)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\Big(\sum_{k=1}^{p_j}\int_{\mathfrak{U}}\alpha_k^{(j)}(u)|g(s,u_k^{(j)})-g(s,u)|\mu(s,x)(du)\Big)ds\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_{\frac{1}{j}}[g(s,\cdot),\mathfrak{U}]ds,$$

откуда, используя равенство (1.13) леммы 1.3, получаем соотношение (3.20).

Л е м м а 3.7. *Имеет место следующее предельное соотношение:*

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big|\int_{ma}^{(m+1)a}\langle\Delta_j(s,x)-\delta_{u_j(s,x)},g(s,x)\rangle ds\Big|\underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows}0 \text{ при } j\to\infty. \quad (3.21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим при каждом $j\in\mathbb{N}$ $\eta_j(t,x)\doteq\Delta_j(s,x)-\delta_{u_j(s,x)}$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ и зафиксируем точки $t_l^{(j)}\in I_l^{(j)}$, $l=1\ldots j$. Докажем сначала соотношение (3.21) в предположении, что $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$. В самом деле, используя равенство (3.19) леммы 3.5 и неравенство $|\eta_j(t,x)|(\mathfrak{U}) \leqslant 2$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, получаем, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ и всех (m,x) из $\mathbb{Z} \times \mathfrak{X}$ имеют место следующие соотношения:

$$|\int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_j(s,x), g(s,u) \rangle ds| =$$

$$= |\sum_{l=1}^{j} \int_{I_l^{(j)}} \langle \eta_j(s+ma), g(s+ma,u) \rangle \, ds| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{j} \int_{I_l^{(j)}} |\langle \eta_j(s+ma,x), g(s+ma,u) - g(t_l^{(j)} + ma, u) \rangle| \, ds \leqslant 2aq_j,$$

где $q_j \doteq \sup\{|g(t_1,u) - g(t_2,u)|, (t_1,u), (t_2,u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U}, |t_1 - t_2| \leqslant \frac{a}{j}\}$. Теперь соотношение (3.22) в случае, когда $g \in B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, вытекает из того, что $q_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Далее, для доказательства соотношения (3.22) в случае, когда функция g принадлежит $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, рассмотрим при каждом $h > 0$ ее стекловское усреднение, т. е. отображение

$$(t,u) \mapsto g(t,u;h) \doteq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(s,u) \, ds, \quad (t,u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \tag{3.22}$$

которое принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, следовательно,

$$g(h) \doteq \operatorname*{supremum}_{(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U}} |g(t,u;h)| < \infty. \tag{3.23}$$

Кроме того, по теореме 1.2 для всякого $l > 0$

$$\lim_{h \downarrow 0} (\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_t^{t+l} \max_{u \in \mathfrak{U}} |g(s,u) - g(s,u;h)| \, ds) = 0. \tag{3.24}$$

Сейчас из неравенства

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} | \int_{ma}^{(m+1)a} \langle \nu_j(s,x), g(s,u) \rangle \, ds| \leqslant \sup_{m \in \mathbb{Z}} | \int_{ma}^{(m+1)a} \langle \nu_j(s,x), g(s,u;h) \rangle ds| +$$

$$+2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+a}\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(s,u)-g(s,u;h)|\,ds,$$

включения $g(\cdot,\cdot;h)\in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и равенства (3.24) получаем утверждение леммы 3.7.

Л е м м а 3.8. *Справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|\int\limits_t^{t+a}\langle\Delta_j(s,x)-\delta_{u_j(s,x)},g(s,u)\rangle\,ds|\underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows}0\quad\textit{при}\quad j\to\infty.\tag{3.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала соотношение (3.25) в предположении, что

$$g\doteq\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\,(\max_{u\in\mathfrak{U}}|g(t,u)|)<\infty.\tag{3.26}$$

Допустим противное. Тогда найдутся такая константа $\alpha>0$ и последовательности $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{X}$, что при всех $k\in\mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$\Big|\int_{t_k}^{t_k+a}f_{j_k}(s,x_k)\,ds\Big|\geqslant\alpha,\tag{3.27}$$

где $f_{j_k}(s,x_k)\doteq\langle\eta_{j_k}(s,x_k),g(s,u)\rangle$, $\eta_{j_k}(s,x)\doteq\Delta_{j_k}(s,x)-\delta_{u_{j_k}(s,x_k)}$. Далее, каждое t_k, $k\in\mathbb{N}$ представим в виде $t_k=m_ka+\theta_ka$, $m_k\in\mathbb{Z}$, $\theta_k\in[0,1)$ и будем считать, чтобы не осложнять обозначений, что $\theta_k\to\widehat{\theta}\in[0,1]$ при $k\to\infty$. Полагаем далее $\xi_k\doteq|\theta_k-\widehat{\theta}|$ и рассмотрим отображения

$$(t,u)\mapsto g_l(t,u)\doteq\psi_l(t)g(t,u),\ (t,u)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\ l=1,2,$$

где

$$\psi_1(t)\doteq\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi_{ma+[\widehat{\theta}a,a]}(t),\ \psi_2(t)\doteq\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi_{ma+[0,\widehat{\theta}a]}(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Поскольку отображение $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, а измеримые функции $\psi_l : \mathbb{R} \to [0,1]$, $l = 1,2$ являются $a-$ периодическими, то отображения $g_l \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ и, стало быть, по лемме 3.7

$$\lim_{k\to\infty} (\sup_{x\in\mathfrak{X}} (\sup_{m\in\mathbb{Z}} |\int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g_l(s,u)\rangle\, ds|)) = 0, \ l = 1,2. \quad (3.28)$$

Далее, принимая во внимание принятые обозначения, имеем следующие соотношения:

$$|\int_{t_k}^{t_k+a} f_{j_k}(s,x_k)\, ds| \leqslant 4\xi_k g + |\int_{m_k a+\widehat{\theta}a}^{m_k a+\widehat{\theta}a+a} f_{j_k}(s,x_k)\, ds| \leqslant$$
$$\leqslant 4\xi_k g + \sum_{l=1}^{2} (\sup_{x\in\mathfrak{X}} (\sup_{m\in\mathbb{Z}} |\int_{ma}^{(m+1)a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g_l(s,u)\rangle\, ds|)),$$

из которых, учитывая (3.28) и то, что $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, вытекает равенство

$$\lim_{k\to\infty} |\int_{t_k}^{t_k+a} f_{j_k}(s,x_k)\, ds| = 0. \quad (3.29)$$

Последнее противоречит неравенству (3.27). Тем самым соотношение (3.25) доказано, если выполнено условие (3.25). В случае, если это условие не выполняется для функции g при каждом $h > 0$, рассмотрим ее стекловское усреднение (3.22), указанные свойства (3.23), (3.24) которого позволяют свести доказательство соотношения (3.25) в общем случае к рассмотренному выше.

Л е м м а 3.9. *Справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_t^{t+1} \langle \Delta_j(s,x) - \delta_{u_j(s,x)}, g(s,u)\rangle\, ds| \underset{x\in\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } j \to \infty. \quad (3.30)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечалось в конце доказательства леммы 3.8, достаточно рассматривать случай, когда функция g удовлетворяет условию (3.25). Докажем соотношение (3.30) также методом от противного. В этом случае найдется константа $\alpha > 0$ и последовательности $\{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{X}$ такие, что будет выполнено неравенство (3.27) при $a = 1$. Представим, далее, каждое t_k в виде $t_k = m_k a + \theta_k a$, $m_k \in \mathbb{Z}$, $\theta_k \in [0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\theta_k \to \widehat{\theta}$ при $k \to \infty$. Полагаем $\xi_k \doteq |\theta_k - \widehat{\theta}|$ и вводим (см. доказательство леммы 3.8) функции ψ_2, g_2. Кроме того, пусть $1 = m'a + \theta' a$, $m' \in \mathbb{Z}_+$, $\theta' \in [0,1)$ и считаем для определенности, что $m' \geqslant 1$ и $\widehat{\theta} + \theta' \in [0,1)$ (в остальных возможных случаях доказательство аналогично). Введем, наконец, в рассмотрение $a-$ периодическую измеримую функцию

$$\psi_3(t) \doteq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi_{ma+[(\widehat{\theta}+\theta')a,a]}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

и рассмотрим также отображение $(t,u) \mapsto g_3(t,u) \doteq \psi_3(t) g(t,u)$, принадлежащее пространству $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$. Теперь, обозначив $m_k' \doteq m_k + m'$, имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&|\int_{t_k}^{t_k+1} f_{j_k}(s,x_k)\,ds| \leqslant 4ag\xi_k + (m'+1) \times \\
&\times \sup_{x\in\mathfrak{X}} (\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_t^{t+a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g(s,u)\rangle\,ds|) + \\
&+ |\int_{(m_k'+1)a}^{(m_k'+1)a+\widehat{\theta}a} \langle \eta_{j_k}(s,x_k), g(s,u)\rangle\,ds| + \\
&+ |\int_{(m_k'+1)a}^{m_k'a+(\widehat{\theta}+\theta')a} \langle \eta_{j_k}(s,x_k), g(s,u)\rangle\,ds| \leqslant \\
&\leqslant 4ag\xi_k + (m'+1)\cdot \sup_{x\in\mathfrak{X}} (\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_t^{t+a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g(s,u)\rangle\,ds|) + \\
&+ \sum_{l=2}^{3} \sup_{x\in\mathfrak{X}} (\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_t^{t+a} \langle \eta_{j_k}(s,x), g_l(s,u)\rangle\,ds|),
\end{aligned}$$

из которых, в силу леммы 3.8, примененной последовательно к функциям $g, g_2, g_3 \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$, и того, что $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, получаем равенство (3.29) при $a = 1$. Последнее противоречит сделанному предположению.

Из доказанных лемм 3.6 и 3.9 вытекает предельное соотношение (3.3), из которого, в свою очередь (см. теорему 2.2 и следствие 2.2), получаем последнее предельное соотношение в утверждении теоремы 3.1.

З а м е ч а н и е 3.1. Из приведенного доказательства леммы 3.9 видно, что соотношение (3.30) будет иметь место, если 1 заменить на любое фиксированное число $l > 0$. Этот факт, в силу топологической эквивалентности, имеет место и для соотношения (3.20) леммы 3.6. Таким образом, соотношение (3.3) справедливо, если вместо единицы взять любое фиксированное число $l > 0$.

4. Игольчатые вариации мерозначных п. п. отображений

1. Для фиксированного множества $\Delta \subset \mathbb{R}$ полагаем

$$\mathfrak{M}(\Delta) \doteq \{\mu \in APM_1 = APM_1(\mathfrak{U})\colon \operatorname{Mod}(\mu) \subset \operatorname{Mod}(\Delta)\} \qquad (4.1)$$

(ясно, что $\mathfrak{M}(\mathbb{R}) = APM_1$). Фиксируем также такую константу $a > 0$, что $\frac{2\pi}{a} \in \operatorname{Mod}(\Delta)$, число $N \in \mathbb{N}$ и произвольный набор точек $0 \leqslant \vartheta_1 < \dots < \vartheta_N < a$, который отождествляем с вектором $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$. В дальнейшем для каждого $p \in \mathbb{N}$ полагаем

$$(\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))^p \doteq \{\vec{\mu} = (\mu_j)_{j=1}^p,\ \mu_j \in \operatorname{rpm}(\mathfrak{U}),\ j = 1 \dots p\}$$

и последовательность $\{\vec{\mu}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, принадлежащую $(\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}))^p$, $\vec{\mu}(m) = (\mu_j(m))_{j=1}^p$, $m \in \mathbb{Z}$, называем п. п., если при каждом $j = 1 \dots p$ последовательность $\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ является п. п., т. е. (см. п. 3 из второго раздела) при каждом $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}(\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}\colon \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} |\mu_j(m+\mathfrak{n}) - \mu_j(m)|_w \leqslant \varepsilon\}$

ее ε-п. п. относительно плотно. Кроме того, если не оговорено специально, рассматриваем лишь такие п. п. последовательности $\{\vec{\mu}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p$, $\vec{\mu}(m) = (\mu_j(m))_{j=1}^p$, $m \in \mathbb{Z}$, что при каждом $j = 1\dots p$ $\mathrm{Mod}(\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset a\,\mathrm{Mod}(\Delta)$ и называем их допустимыми п. п. последовательностями.

Сейчас каждому $i \in \{1\dots N\}$ поставим в соответствие число $k_i \in \mathbb{N}$ и пару $(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, в которой $\vec{\beta}_{k_i} \doteq (\beta_{ij})_{j=1}^{k_i}$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $j = 1\dots k_i$, а $\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\vec{\nu}_{k_i}(m) \doteq (\nu_{ij}(m))_{j=1}^{k_i}$, $m \in \mathbb{Z}$ суть допустимая п. п. последовательность из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i}$. В дальнейшем $|\vec{\beta}_{k_i}| \doteq \sum\limits_{j=1}^{k_i} \beta_{ij}$ и, если

$$\vec{\beta}^p_{k_i^p} = (\beta^p_{ij})_{j=1}^{k_i^p}, \quad \vec{\nu}^p_{k_i^p}(m) = (\nu^p_{ij}(m))_{j=1}^{k_i^p},\ m \in \mathbb{Z},\ p = 1, 2,$$

то полагаем

$$\begin{cases} (\vec{\beta}^1_{k_i^1}, \vec{\beta}^2_{k_i^2}) \doteq (\beta^1_{i1}\dots\beta^1_{ik_i^1}, \beta^2_{i1}\dots\beta^2_{ik_i^2}) \\ (\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m), \vec{\nu}^2_{k_i^2}(m)) \doteq (\nu^1_{i1}(m)\dots\nu^1_{ik_i^1}(m), \nu^2_{i1}(m)\dots\nu^2_{ik_i^2}(m)), \end{cases} \tag{4.2}$$

где $m \in \mathbb{Z}$ и, следовательно, если $\{\vec{\nu}^p_{k_i^p}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — допустимые п. п. последовательности из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i^p}$, $p = 1, 2$, то последовательность $\{(\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m), \vec{\nu}^2_{k_i^2}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является допустимой п. п. последовательностью из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i^1+k_i^2}$.

Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{V} \doteq \Big\{\{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \doteq \tag{4.3}$$
$$\doteq \{(\vec{\beta}_{k_1}, \{\vec{\nu}_{k_1}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\dots(\vec{\beta}_{k_N}, \{\vec{\nu}_{k_N}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}, k_1\dots k_N \in \mathbb{N}\Big\}$$

и полагаем: если $\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \in \mathcal{V}$, то для всякого действительного числа $\lambda > 0$

$$\lambda\iota \doteq \{(\lambda\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \ (\lambda\vec{\beta}_{k_i} \doteq (\beta_{ij})_{j=1}^{k_i}), \tag{4.4}$$

и, если $\iota_p = \{(\vec{\beta}^{\,p}_{k_i^p}, \{\vec{\nu}^{\,p}_{k_i^p}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \in \mathcal{V}$, $p=1,2$, то (см. (4.2))

$$\iota_1 + \iota_2 \doteq \{\big((\vec{\beta}^{\,1}_{k_i^1}, \vec{\beta}^{\,2}_{k_i^2}), \{(\vec{\nu}^{\,1}_{k_i^1}(m), \vec{\nu}^{\,2}_{k_i^2}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}\}_{i=1}^N, \tag{4.5}$$

т. е. $\mathcal{V}$ — конус, называемый конусом п. п. иголок.

Пусть далее

$$\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \{\vec{\iota} = (\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \quad \iota_1 \ldots \iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \mathcal{V}\}, \tag{4.6}$$

$$\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \{\vec{\mathfrak{y}} = (\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \quad \mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in [0,\rho]\}, \quad \rho > 0, \tag{4.7}$$

и для любых $\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $\vec{\mathfrak{y}} \in \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ полагаем

$$\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} \doteq \mathfrak{y}_1\iota_1 + \ldots + \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}. \tag{4.8}$$

Поэтому если $\iota_{\mathfrak{q}} \doteq \{(\vec{\beta}^{\,\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}, \{\vec{\nu}^{\,\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$, $\mathfrak{q} = 1 \ldots \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, то из (4.2)–(4.5) вытекает, что $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ и при этом

$$\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} = \Big\{\big((\mathfrak{y}_1\vec{\beta}^{\,1}_{k_i^1}, \ldots \mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\vec{\beta}^{\,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}), \{(\vec{\nu}^{\,1}_{k_i^1}(m) \ldots \vec{\nu}^{\,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}\Big\}_{i=1}^N. \tag{4.9}$$

Далее, с каждой иголкой $\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N \in \mathcal{V}$, такой, что $\beta(\iota) \doteq \sum\limits_{i=1}^N |\vec{\beta}_{k_i}| > 0$, свяжем положительное число $\varepsilon(\iota) \doteq \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} (\vartheta_{i+1} - \vartheta_i)/\beta(\iota)$, $\vartheta_{N+1} \doteq a$, и при (ε, m) из $(0, \varepsilon(\iota)] \times \mathbb{Z}$ рассмотрим для каждого $i = 1 \ldots N$ дизъюнктную, примыкающую друг к другу систему полуинтервалов

$$T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota) \doteq \begin{cases} ma + [\vartheta_i, \vartheta_i + \varepsilon\beta_{i1}), \\ ma + [\vartheta_i + \varepsilon\sum\limits_{l=1}^{j-1}\beta_{il}, \vartheta_i + \varepsilon\sum\limits_{l=1}^{j}\beta_{il}), \ 2 \leqslant j \leqslant k_i. \end{cases} \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что $\operatorname{mes} T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota) = \varepsilon\beta_{ij}$ и при каждом $i = 1 \ldots N$ имеют место соотношения

$$\bigcup_{j=1}^{k_i} T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota) = ma + \vartheta_i + [0, \varepsilon|\vec{\beta}_{k_i}|) \subset ma + [\vartheta_i, \vartheta_{i+1}].$$

Теперь, если рассматривается иголка (см. (4.9)) $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ такая, что

$$\beta(\vec{\iota}) \doteq \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} |\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}| > 0, \tag{4.11}$$

то с ней свяжем положительное число

$$\varepsilon(\rho, \vec{\iota}) \doteq \min_{1 \leqslant i \leqslant N} (\vartheta_{i+1} - \vartheta_i)/\rho\beta(\vec{\iota}),\ \vartheta_{N+1} = a. \tag{4.12}$$

Для такой иголки из (4.9) и (4.10) получаем, что при каждом $i \in \{1 \ldots N\}$ и всех $(\varepsilon, m) \in (0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota})\,]$

$$T_{m,i,j}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \begin{cases} T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{y}_1, \iota_1),\ 1 \leqslant j \leqslant k_i^1, \\ \varepsilon(\mathfrak{y}_1|\vec{\beta}_{k_i^1}^1| + \ldots + \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}-1}|\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}-1}}^{\mathfrak{q}-1}|) + T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}, \iota_{\mathfrak{q}}), \end{cases} \tag{4.13}$$

где $2 \leqslant \mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{k} + \mathfrak{m},\ 1 \leqslant j \leqslant k_i^{\mathfrak{q}}$. Поэтому если

$$\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) \doteq \bigcup_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} T_{m,i,j}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \tag{4.14}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant \mathfrak{q} \leqslant \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$, то так определенная система полуинтервалов $\{\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\}_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ дизъюнктна,

$$\operatorname{mes} \mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \varepsilon\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}|\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}|,\ \mathfrak{q} = 1 \ldots \mathfrak{k} + \mathfrak{m}, \tag{4.15}$$

и, кроме того, для любых $m \in \mathbb{Z},\ i = 1 \ldots N$

$$\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = ma + \vartheta_i + [0, \varepsilon \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}|\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}|) \subset ma + [\vartheta_i, \vartheta_{i+1}]. \tag{4.16}$$

2. Сейчас введем игольчатые вариации для элементов множества $\mathfrak{M}(\Delta)$, определенного равенством (4.1).

О п р е д е л е н и е 4.1. Пусть иголка

$$\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N} \in \mathcal{V}$$

такая, что $\beta(\iota) > 0$, и пусть $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\iota))$. Тогда отображение $t \mapsto \mu(t;\varepsilon,\iota) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, $t \in \mathbb{R}$, определенное равенством

$$\mu(t;\varepsilon,\iota) \doteq \begin{cases} \widehat{\mu}(t), t\in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}([ma,(m+1)a]\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N}\bigcup\limits_{j=1}^{k_i} T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)), \\ \nu_{ij}(m), t\in T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota), \ m\in\mathbb{Z}, 1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant k_i, \end{cases} \tag{4.17}$$

называется игольчатой вариацией отображения $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$, отвечающей иголке ι.

З а м е ч а н и е 4.1. При $\varepsilon = 0$ считаем $\mu(t;0,\iota) \equiv \widehat{\mu}(t)$ при всех $\iota \in \mathcal{V}$.

З а м е ч а н и е 4.2. Игольчатая вариация отображения $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$, отвечающая иголке $\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N} \in \mathcal{V}$, определена, вообще говоря, в предположении, что в зафиксированном наборе $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^{N}$ точки $\vartheta_i \in [0,a]$, $i = 1\ldots N$ удовлетворяют условию $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_N < a$.

Определим сейчас игольчатую вариацию отображения $\widehat{\mu}(\cdot)$ для набора $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^{N}$, в котором $0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_N < a$. В этом случае выделяем набор $\vec{\vartheta}\,' = (\vartheta'_i)_{i=1}^{N'}$, $N' \leqslant N$ такой, что $0 \leqslant \vartheta'_1 < \ldots < \vartheta'_{N'} < a$, где

$$\vartheta'_1 \doteq \vartheta_1 = \ldots = \vartheta_{1+p_1}, \ \vartheta'_2 \doteq \vartheta_{2+p_1} = \ldots = \vartheta_{2+p_1+p_2}, \ldots,$$
$$\vartheta'_{N'} \doteq \vartheta_{N'+p_1+\ldots+p_{N'-1}} = \ldots = \vartheta_{N'+p_1+\ldots+p_{N'-1}+p_{N'}},$$

и иголке ι поставим в соответствие иголку

$$\iota' \doteq \{(\vec{\beta}'_{k'_i}, \{\vec{\nu}'_{k'_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N'},$$

в которой (здесь см. (4.2))

$$\vec{\beta}_{k'_i} \doteq \begin{cases} (\vec{\beta}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}, \ldots, \vec{\beta}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}+p_i}), \text{ если } p_i > 0 \\ \vec{\beta}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}, \text{ если } p_i = 0, \end{cases}$$

$$\vec{\nu}_{k'_i}(m) \doteq \begin{cases} (\vec{\nu}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}(m)\ldots\vec{\nu}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}+p_i}(m)), \text{ если } p_i > 0 \\ \vec{\nu}_{k_i+p_1+\ldots+p_{i-1}}(m), \text{ если } p_i = 0, \ (m \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Отметим, что $\beta(\iota) = \beta(\iota')$. Теперь по набору $\vec{\nu}' = (\nu'_i)_{i=1}^{N'}$ и иголке ι' строим аналогично (4.10) при каждом $m \in \mathbb{Z}$ и $i = 1\ldots N'$ дизъюнктную систему полуинтервалов $\{T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota')\}_{j=1}^{k'_i}$, содержащуюся в $ma + [\vartheta'_i, \vartheta'_{i+1}]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\iota')]$, и определим аналогично (4.17) игольчатую вариацию $\mu(\cdot;\varepsilon,\iota')$ отображения $\widehat{\mu}$, которую и будем считать игольчатой вариацией $\widehat{\mu}$, отвечающей иголке ι и набору $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$, в котором $0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_N < a$.

Таким образом, согласно данному определению, при исследовании свойств игольчатых вариаций элементов множества $\mathfrak{M}(\Delta)$, достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда фиксируется такой набор $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$, что $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_N < a$.

З а м е ч а н и е 4.3. В случае, если отображение $\widehat{\mu}(\cdot)$ из $\mathcal{M}_1$ является a-периодическим, то рассмотрев $\mu(t;\varepsilon,\iota)$, определенное равенством (4.17) с иголкой $\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$, в которой при каждом $i = 1\ldots N$ последовательности

$$\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i}, \, \vec{\nu}_{k_i}(m) = (\nu_{ij}(m))_{j=1}^{k_i}$$

a-периодичны (т.е. $\nu_{ij}(m+a) = \nu_{ij}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, $j = 1\ldots k_i$), получим a-периодическую игольчатую вариацию для a-периодического отображения $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathcal{M}_1$.

Рассмотрим иголку $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ такую, что $\beta(\vec{\iota}) > 0$ (см. (4.11)). В этом случае из равенств (4.9), (4.13) и (4.14), а также определения 4.1 вытекает

Л е м м а 4.1. *Пусть* $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$, $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ *и* $\beta(\vec{\iota}) > 0$. *Тогда при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota}))$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) = \tag{4.18}$$

$$= \begin{cases} \widehat{\mu}(t), \ t \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} ([ma,(m+1)a] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} \bigcup\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \\ \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m), \ t \in T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \end{cases}$$

где $m\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant i\leqslant N$, $1\leqslant\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, $1\leqslant j\leqslant k_i^{\mathfrak{q}}$.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* $\vec{\iota}=(\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *где* $\iota_{\mathfrak{q}}\doteq$ $\doteq\{(\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}},\{\vec{\nu}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$, $\mathfrak{q}=1\ldots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ *и* $\beta(\vec{\iota})>0$. *Тогда для каждой функции* $\widehat{\mu}(\cdot)\in\mathfrak{M}(\Delta)$ *множество*

$$\mathfrak{A}\doteq\{\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)\in\mathfrak{X}\},\ \ \mathfrak{X}\doteq[0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]\times\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},$$

содержится в множестве $\mathfrak{M}(\Delta)$, *является равностепенно п. п. и*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-\widehat{\mu}(\cdot)\|_w)=0. \tag{4.19}$$

Кроме того, для каждой функции $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{w}(\gamma)=0, \tag{4.20}$$

где

$$\mathfrak{w}(\gamma)\doteq\underset{\substack{(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,),(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,)\in\mathfrak{X}\\|\varepsilon'-\varepsilon''|+|\vec{\mathfrak{y}}'-\vec{\mathfrak{y}}''|\leqslant\gamma}}{\text{supremum}}\ (\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}|\langle\mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota})-\mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}),g(s,u)\rangle|ds).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную функцию $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и рассмотрим отображения

$$t\mapsto\widehat{f}(t)\doteq\langle\widehat{\mu}(t),c(u)\rangle,$$
$$t\mapsto f(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)\doteq\langle\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),c(u)\rangle=\int_{\mathfrak{U}}c(u)\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})(du),\ \ (\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)\in\mathfrak{X},$$

определенные на $t\in\mathbb{R}$, а также отвечающие им последовательности $\{\widehat{\mathfrak{f}}(\cdot,m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\{\mathfrak{f}(\cdot,m,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset L_1([0,a],\mathbb{R})$, определенные при каждом $m\in\mathbb{Z}$ равенствами $\widehat{\mathfrak{f}}(t,m)\doteq\widehat{f}(t+ma)$, $\mathfrak{f}(t,m,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)\doteq f(t+ma,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)$, $t\in[0,a]$, соответственно. Поскольку $\widehat{\mu}\in\mathfrak{M}(\Delta)$, то $\widehat{f}\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и значит последовательность

$\{\widehat{\mathfrak{f}}(\cdot,m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. Кроме того, т. к. $\iota_{\mathfrak{q}}\in\mathcal{V}$, то при всех $i=1\dots N$, $\mathfrak{q}=1\dots\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ и $j=1\dots k_i^{\mathfrak{q}}$ числовые последовательности $\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, где $\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\doteq\langle\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m),c(u)\rangle$, будут также п. п. Поэтому для каждого $\epsilon>0$ множество

$$\mathcal{E}(\sigma)\doteq\mathcal{E}(\{\widehat{\mathfrak{f}}(\cdot,m)\}_{m\in\mathbb{Z}},\sigma)\bigcap\Big(\bigcap_{i=1}^{N}\bigcap_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\bigcap_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}},\sigma)\Big),\quad(4.21)$$

где $\sigma\doteq\min(\epsilon/2,\epsilon/2a)$, не пусто и относительно плотно. Покажем, что это множество содержится в множестве

$$\mathcal{E}(\epsilon)\doteq\bigcap_{(\epsilon,\vec{\mathfrak{y}})\in\mathfrak{X}}\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}(\cdot,m,\epsilon,\vec{\mathfrak{y}})\}_{m\in\mathbb{Z}},\sigma).$$

Действительно, если $\mathfrak{n}$ принадлежит $\mathcal{E}(\sigma)$, то, обозначив

$$A_m(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\bigcup_{i=1}^{N}A_{m,i}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}),\quad A_{m,i}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\quad(4.22)$$

где $m\in\mathbb{Z}$, получаем следующие соотношения:

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a|\mathfrak{f}(t,m+\mathfrak{n},\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})-\mathfrak{f}(t,m,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})|\,dt\overset{(4.18)}{=}$$
$$=\sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\int_{[0,a]\setminus A_0(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})}|\widehat{\mathfrak{f}}(t,m+\mathfrak{n})-\widehat{\mathfrak{f}}(t,m)|dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}|\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+\mathfrak{n})-\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)|\cdot\operatorname{mes}T_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\Big)\overset{(4.15)}{\leqslant}$$
$$\leqslant\sup_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\int_0^a|\widehat{\mathfrak{f}}(t,m+\mathfrak{n})-\widehat{\mathfrak{f}}(t,m)|dt+$$
$$+a\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\1\leqslant\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{k}+\mathfrak{m}\\1\leqslant j\leqslant k_i^{\mathfrak{q}}}}\big(\sup_{m\in\mathbb{Z}}|\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+\mathfrak{n})-\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)|\big|\big)\overset{(4.21)}{\leqslant}\epsilon.$$

Отсюда следует, что множество последовательностей

$$\mathfrak{P} = \{\{\mathfrak{f}(\cdot, m, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,)\}_{m\in\mathbb{Z}}, \quad (\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,) \in \mathfrak{X}\}$$

равностепенно п. п. и для всех $(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,) \in \mathfrak{X}$ справедливо включение

$$\mathrm{Mod}(\{\mathfrak{f}(\cdot, m, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset$$

$$\subset \mathrm{Mod}\big(\Lambda(\{\widehat{\mathfrak{f}}(\cdot, m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\big) \bigcup \big(\bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \bigcup_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \Lambda(\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\big)\big). \qquad (4.23)$$

В свою очередь, из равностепенной п. п. множества $\mathfrak{P}$ вытекает равностепенная п. п. множества функций $\{f(\cdot, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,),\ (\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,) \in \mathfrak{X}\}$. Отсюда в силу произвольности выбора функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, получаем (см. определение 2.2), что множество $\mathfrak{A}$ равностепенно п. п. Далее, из (4.23) и теоремы 1.2, принимая во внимание, что $\widehat{\mu} \in \mathfrak{M}(\Delta)$ и $\iota_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{V}$ (а значит, $\mathrm{Mod}(\{\mathfrak{f}_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}) \subset a\,\mathrm{Mod}(\Delta)$), получаем, что при всех $(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,)$ из $\mathfrak{X}$ $\mathrm{Mod}(\{\mathfrak{f}(\cdot, m, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ содержится в $a\,\mathrm{Mod}(\Delta) + 2\pi\mathbb{Z}$. Следовательно, учитывая, что точка $\frac{2\pi}{a}$ принадлежит $\mathrm{Mod}(\Delta)$, имеем следующие соотношения:

$$\mathrm{Mod}(f(\cdot, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,)) \subset \frac{1}{a}(a\,\mathrm{Mod}(\Delta) + 2\pi\mathbb{Z}) + \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z} \subset \mathrm{Mod}(\Delta).$$

Теперь из леммы 2.4 следует, что $\mathrm{Mod}(\mu(\cdot, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)) \subset \mathrm{Mod}(\Delta)$, $(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,) \in \mathfrak{X}$. Тем самым первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

Далее, фиксируем произвольную функцию $\varphi \in \mathfrak{V}_1(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и пусть (см. замечание 1.1) функция $\psi_\varphi \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ такая, что при п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} |\varphi(t, u)| \leqslant \psi_\varphi(t)$. Поскольку (см. (4.7), (4.11) и (4.16)) $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} A_m(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,) \leqslant \varepsilon\rho\beta(\vec{\iota}\,)$, то по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла [36] получаем, что

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{A_m(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,)} \psi_\varphi(t)\,dt \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Отсюда (см. (4.18) и (4.22)), в силу неравенства

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{ma}^{(m+1)a} |\langle \mu(t, \varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,) - \widehat{\mu}(t), \varphi(t, u)\rangle|\,dt \leqslant 2 \sup_{m\in\mathbb{Z}} \int_{A_m(\varepsilon, \vec{\mathfrak{y}}\,)} \psi_\varphi(t)\,dt,$$

вытекает, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\langle\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)-\widehat{\mu}(t),\varphi(t,u)\rangle|dt\underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows}0 \text{ при } \varepsilon\downarrow 0.$$

В свою очередь, принимая во внимание, что $\psi_\varphi\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и при любом $q\in\mathbb{N}$

$$|\int_{\mathbb{R}}\langle\mu(s,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,)-\widehat{\mu}(s),\varphi(s,u)\rangle ds|\leqslant 2\int_{\mathbb{R}\setminus[-qa,qa]}\psi_\varphi(s)ds+$$
$$+2q\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\langle\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)-\widehat{\mu}(t),\varphi(t,u)\rangle|dt,$$

получаем следующее предельное равенство:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\int_{\mathbb{R}}\langle\mu(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)-\widehat{\mu}(t),\varphi(t,u)\rangle dt|)=0,$$

которое по определению нормы $\|\cdot\|_w$ (см. п.1 из второго раздела) влечет равенство (4.19).

Докажем теперь предельное равенство (4.20), считая, что $\mathfrak{g}\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\|g(t,\cdot)\|_{C(\mathfrak{U},\mathbb{R})}<\infty$ (в общем случае для функции g рассмотрим ее стекловское усреднение). Заметим (здесь см. (4.18)), что если

$$t\in\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[ma,(m+1)a]\setminus(\bigcup_{i=1}^{N}(A'_{m,i}\bigcup A''_{m,i}),$$

где

$$A'_{m,i}\doteq A_{m,i}(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}\,'),\ A''_{m,i}\doteq A_{m,i}(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}\,''),$$

то $\mu(t;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}\,'\,\vec{\iota}\,)=\mu(t;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}\,''\,\vec{\iota}\,)=\widehat{\mu}(t)$ и в случае, если точка

$$t\in T_{m,i,j}(\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}\,'\,\vec{\iota}\,)\bigcap T_{m,i,j}(\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}\,''\,\vec{\iota}\,),$$

то $\mu(t;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}\,) = \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}\,) = \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)$. Поэтому при каждом m из $\mathbb{Z}$ имеют место соотношения:

$$\int_{ma}^{(m+1)a} |\langle \mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}\,) - \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}\,), g(s,u)\rangle| ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{A'_{m,i}\cup A''_{m,i}} |\langle \mu(s;\varepsilon',\vec{\mathfrak{y}}'\,\vec{\iota}\,) - \mu(s;\varepsilon'',\vec{\mathfrak{y}}''\,\vec{\iota}\,), g(s,u)\rangle| ds \overset{(4.16)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2\mathfrak{g} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} k_i^{\mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{\mathfrak{q}} |\varepsilon'\mathfrak{y}_l{}' - \varepsilon''\mathfrak{y}_l{}''| \cdot |\vec{\beta}^{\,l}_{k_i^l}|,$$

из которых вытекает равенство (4.20).

С л е д с т в и е 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 . *Тогда отображение* $(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,) \mapsto \mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,)$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ (где $\mathfrak{X} \doteq [0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota}\,)]\times\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$) и для любой функции $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$

$$y(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{t}^{t+1} |\langle \mu(s;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\,) - \widehat{\mu}(s), g(s,u)\rangle| ds \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0 \qquad (4.24)$$

при $\varepsilon \downarrow 0$.

3. В дальнейшем нам понадобится еще одно свойство элементов множества $\mathcal{V}$, которое вытекает из следующего утверждения.

Л е м м а 4.2. *Допустим, что последовательность непрерывных отображений* $(t,u) \mapsto \mathfrak{f}_m(t,u)$, $(t,u) \in [0,a]\times\mathfrak{U}$, $m\in\mathbb{Z}$ *является п. п. равномерно по* $u\in\mathfrak{U}$[3]. *Тогда для любой п. п. последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ *последовательность* $\{\langle\nu(m),\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset C([0,a],\mathbb{R})$ *будет п. п.*

[3] т. е. для любого $\varepsilon > 0$ множество $\bigcap_{u\in\mathfrak{U}} \mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon)$, где $\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon) \doteq \{\mathfrak{n}\in\mathbb{Z} : \max_{t\in[0,a]} |\,\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,u) - \mathfrak{f}_m(t,u)| \leqslant \varepsilon\}$, относительно плотно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как последовательность отображений $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $C([0,a]\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ п. п. равномерно по $u\in\mathfrak{U}$, то $\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\|\mathfrak{f}_m\|_{C([0,a]\times\mathfrak{U},\mathbb{R})}\doteq\mathfrak{k}<\infty$ и для заданного $\varepsilon>0$ найдется такое $\gamma>0$, что $\sup\limits_{(t,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}}\omega_\gamma[\mathfrak{f}_m(t,\cdot),\mathfrak{U}]<\frac{\varepsilon}{3}$. Пусть, далее, $\mathcal{U}_1\ldots\mathcal{U}_p$ — открытое покрытие компакта $\mathfrak{U}$ такое, что $\operatorname{diam}\mathcal{U}_j\leqslant\gamma$, $j=1\ldots p$, и через $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь для каждого $j=1\ldots p$ фиксируем точку $u_j\in\mathfrak{U}\bigcap\mathcal{U}_j$, в которой $\alpha_j(u_j)>0$, и рассмотрим числовую п. п. последовательность $\{\lambda_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, где

$$\lambda_j(m)\doteq\langle\nu(m),\alpha_j(u)\rangle\in[0,1],\ m\in\mathbb{Z},\ j=1\ldots p.$$

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^p\lambda_j(m)=1$ при всех $m\in\mathbb{Z}$, то последовательность $\{\Delta(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, где $\Delta(m)\doteq\sum\limits_{j=1}^p\lambda_j(m)\delta_{u_j}$, $m\in\mathbb{Z}$, содержится в $\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ и является п. п. Сейчас для любого $\mathfrak{n}$, принадлежащего относительно плотному множеству

$$\mathcal{E}(\mathfrak{y})\doteq\Big(\bigcap_{u\in\mathfrak{U}}\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\mathfrak{y})\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{j=1}^p\mathcal{E}(\{\lambda_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}),\mathfrak{y}\Big),$$

$\mathfrak{y}\doteq\min(\frac{\varepsilon}{6p\mathfrak{k}},\frac{\varepsilon}{6})$, имеем (см. доказательство теоремы 2.2) следующие соотношения:

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\big(\max_{t\in[0,a]}|\langle\nu(m+\mathfrak{n}),\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,u)\rangle-\langle\nu(m),\mathfrak{f}_m(t,u)\rangle|\big)\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{(t,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}}|\langle\nu(m)-\Delta(m),\mathfrak{f}_m(t,u)\rangle|+$$
$$+\mathfrak{k}\sum_{j=1}^p\sup_{m\in\mathbb{Z}}|\lambda_j(m+\mathfrak{n})-\lambda_j(m)|+\sup_{m\in\mathbb{Z}}\big(\max_{t\in[0,a]}|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,u)-\mathfrak{f}_m(t,u)|\big)\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{(t,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}}\omega_\gamma[\mathfrak{f}_m(t,\cdot),\mathfrak{U}]+(p\mathfrak{k}+1)\mathfrak{y}\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon,$$

из которых вытекает, что $\mathcal{E}(\mathfrak{y}) \subset \mathcal{E}(\{\langle \nu(m), \mathfrak{f}_m(\cdot, u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}, \varepsilon)$.

С л е д с т в и е 4.2. *Пусть функция* $f \in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. *Тогда для любой иголки* $\iota = \{(\vec{\beta}_{k_i}, \{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$ *при каждом* $t \in [0, a]$ *существуют пределы*

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{qa} \sum_{m=0}^{q-1} \beta_{ij} \langle \nu_{ij}(m), f(t + ma, u)\rangle, \ i = 1 \dots N, \ j = 1 \dots k_i.$$

5. Лемма Филиппова для п. п. отображений

1. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, $\mathfrak{x} \doteq \operatorname{diam}\mathfrak{X}$ и $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство, $\operatorname{comp}(\mathfrak{X})$ — совокупность всех непустых компактных подмножеств из $\mathfrak{X}$ с метрикой Хаусдорфа dist_ρ. Отметим [68], что $(\operatorname{comp}(\mathfrak{X}), \operatorname{dist}_\rho)$ — компактное метрическое пространство. Далее, на множестве $L_1^{lok}(\mathbb{R}, \operatorname{comp}(\mathfrak{X}))$ (см. п. 1 из первого раздела) зададим $d_{\operatorname{dist}_\rho}$-расстояние

$$d_{\operatorname{dist}_\rho}(F_1, F_2) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \operatorname{dist}_\rho(F_1(s), F_2(s))\, ds, \qquad (5.1)$$

где $F_1, F_2 \in L_1^{lok}(\mathbb{R}, \operatorname{comp}(\mathfrak{X}))$, и рассмотрим метрическое пространство метрическое $S(\mathbb{R}, (\operatorname{comp}(\mathfrak{X}), d_{\operatorname{dist}_\rho}))$. Напомним, что если $F \in S(\mathbb{R}, \operatorname{comp}(\mathfrak{X}))$, то $\operatorname{Mod}(F)$ состоит из таких точек $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} exp(i\lambda\tau_j) = 1$ $(i^2 = -1)$ для всякой F-возвращающей последовательности $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Рассмотрим далее такую функцию $f \in \mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, что при каждом x из $\mathfrak{X}$ $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, и для нее построим отображение

$$t \mapsto \mathcal{N}(t) \doteq \{x \in \mathfrak{X} : f(t, x) = 0\}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (5.2)$$

Если $\mathcal{N}(t) \neq \varnothing$, то $\mathcal{N}(t) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{X})$ и, кроме того [36; 68], отображение $t \mapsto \mathcal{N}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ измеримо, и существует такая измеримая функция $x : \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$, что $x(t) \in \mathcal{N}(t)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$.

Но эта функция может не принадлежать пространству $S(\mathbb{R},\mathfrak{X})$. Чтобы показать это, приведем сначала пример (см. [69]) такой функции $\mathfrak{f}\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что множество ее нулей совпадает с $\mathbb{Z}$ и для которой отображение $t\mapsto \operatorname{sign}\mathfrak{f}(t)$ (считаем $\operatorname{sign} 0 = 0$) не принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

П р и м е р 5.1. Для каждого $j\in\mathbb{Z}_+$ рассмотрим множества

$$A_j \doteq \{z\in\mathbb{Z} : z\equiv \frac{1}{3}((-2)^j-1)(\mod 2^{j+1})\},\quad B_j\doteq 2^j+A_j,$$

из определения которых вытекает, что $A_k\bigcap A_j=\varnothing$ при $k\neq j$, $B_j = A_{j+1}\bigcup B_{j+1}$ для всякого $j\in\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Z}=\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}A_j$. Далее, фиксируем функцию $\psi\in C(\mathbb{R},[0,1])$ такую, что $\psi(t)\in(0,1]$ при $t\in(0,1)$ и $\psi(t)=0$ при $t\in\mathbb{R}\setminus(0,1)$, и полагаем

$$f_j(t)\doteq(-2)^{-j}\sum_{i\in A_j}\psi(t-i),\ t\in\mathbb{R},\ j\in\mathbb{Z}_+.$$

Поскольку f_j — непрерывная 2^{j+1}-периодическая функция и $\max\limits_{t\in\mathbb{R}}|f_j(t)|\leqslant 2^{-j}$, $j\in\mathbb{Z}_+$, то функция

$$\mathfrak{f}(t)\doteq\sum_{j=0}^{\infty}f_j(t),\quad t\in\mathbb{R} \tag{5.3}$$

принадлежит $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\mathfrak{f}(t)|\leqslant 1$. Кроме того, множество нулей этой функции совпадает с $\mathbb{Z}$. Покажем теперь, что отображение $t\mapsto\operatorname{sign}\mathfrak{f}(t)$ не принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Действительно, пусть $m\in\mathbb{Z}_+$ и $k>m$. Тогда $\mathbb{Z}=\bigcup\limits_{l=0}^{k-1}A_l\bigcap B_{k-1}$. Далее, берем $a_1\in A_k$ и $a_2\in A_{k-1}$. Отметим здесь, что $A_k\subset B_{k-1}$ и $A_{k+1}\subset B_k\subset B_{k-1}$. Для этих чисел найдется такое $l\in\{0\dots k-1\}$, что $a_1+2^k-2^m\in A_l$ и $a_2+2^k-2^m\in A_l$. Теперь имеем следующие соотношения

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+2^m)-\operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+2^k)|ds\ \geqslant$$

$$\geqslant\max_{i=1,2}\{\int_0^1|\operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+a_i+2^k-2^m)-\operatorname{sign}\mathfrak{f}(s+a_i)|\,ds\}=2,$$

из которых следует, что множество функций $\{\operatorname{sign}\mathfrak{f}(\cdot+2^j)\}_{j=0}^{\infty}$ не имеет конечной (относительно метрики d) 2-сети и, значит, (см. [31. С. 219]), функция $t\mapsto\operatorname{sign}\,\mathfrak{f}(t)$ не принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Отметим, что пример функции $\mathfrak{f}\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, обращающейся в нуль на счетном множестве точек из $\mathbb{R}$ и для которой отображение $\operatorname{sign}\mathfrak{f}\notin S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, приведен также в работе [55].

П р и м е р 5.2. Рассмотрим функцию $\mathfrak{f}$ из примера 5.1 и по ней построим отображение $(t,x)\mapsto f(t,x)\doteq|\,\mathfrak{f}(t)|-\mathfrak{f}(t)x$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times[-1,1]$, которое принадлежит $B(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathbb{R})$. Для этого отображения $\mathcal{N}(t)=\{\operatorname{sign}\,\mathfrak{f}(t)\}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (здесь см. (5.2) при $\mathfrak{X}\doteq[-1,1]$, $\mathfrak{Y}\doteq\mathbb{R}$), а т. к. $\operatorname{sign}\mathfrak{f}\notin S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то не существует функции $x\in S(\mathbb{R},[-1,1])$, удовлетворяющей при п. в. $t\in\mathbb{R}$ равенству $f(t,x(t))=0$.

В связи со сказанным возникает вопрос о существовании таких функций $x\in S(\mathbb{R},\mathfrak{X})$, что $x(t)\in\mathcal{N}(t)$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$. Для приведения достаточных условий существования таких функций предполагаем далее, что $\mathcal{N}(t)\neq\varnothing$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$, и введем в рассмотрение следующее измеримое отображение $(\alpha>0)$:

$$t\mapsto\mathcal{W}(t,\alpha)\doteq\{x\in\mathfrak{X}\colon\ \|f(t,x)\|\leqslant\alpha\}\in\operatorname{comp}(\mathfrak{X}),\ \ t\in\mathbb{R}.\qquad(5.4)$$

Отметим, что $\lim\limits_{\alpha\downarrow0}\int\limits_t^{t+1}\operatorname{dist}_\rho(\mathcal{W}(s,\alpha),\mathcal{N}(s))ds=0$ при каждом $t\in\mathbb{R}$.

Т е о р е м а 5.1. *Пусть функция* $f\in\mathfrak{V}_1^{loc}(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ *удовлетворяет* [4] *условию* A) *и* $f(\cdot,x)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ *при каждом*

[4]См. определение 1.5.

$x \in \mathfrak{X}$. *Тогда, если*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha), \mathcal{N}(\cdot)) = 0, \tag{5.5}$$

то $\mathcal{N} \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$ *и* $\mathrm{Mod}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Mod}\big(\bigcup\limits_{x \in \mathfrak{X}} \Lambda(f(\cdot,x))\big)$. *Кроме того, существует такая функция* $x \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$, *что* $x(t) \in \mathcal{N}(t)$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и* $\mathrm{Mod}(x) \subset \mathrm{Mod}(\mathcal{N})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ полагаем

$$\Delta_\alpha(t_1,t_2) \doteq \max\{\max_{x \in \mathcal{N}(t_1)} \rho(x, \mathcal{W}(t_2,\alpha)), \max_{x \in \mathcal{N}(t_2)} \rho(x, \mathcal{W}(t_1,\alpha))\}.$$

Поскольку $\rho(x,A) \leqslant \rho(x,B) + \mathrm{dist}_\rho(A,B)$ для любых $x \in \mathfrak{X}$ и $A, B \in \mathrm{comp}(\mathfrak{X})$, то из определения $\Delta_\alpha(t_1,t_2)$ получаем, что при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\Delta_\alpha(t_1,t_2) \geqslant \mathrm{dist}_\rho(\mathcal{N}(t_1), \mathcal{N}(t_2)) - \\ -\mathrm{dist}_\rho(\mathcal{W}(t_1,\alpha), \mathcal{N}(t_1)) - \mathrm{dist}_\rho(\mathcal{W}(t_2,\alpha), \mathcal{N}(t_2)).$$

Откуда вытекает, что для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{N}_\tau(\cdot), \mathcal{N}(\cdot)) \leqslant \tag{5.6}$$
$$\leqslant 2 d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha), \mathcal{N}(\cdot)) + \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \Delta_\alpha(s, s+\tau) ds.$$

Далее для заданного $\varepsilon > 0$ в силу (5.5) найдется такое α из $(0,\varepsilon)$, что

$$d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha), \mathcal{N}(\cdot)) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.7}$$

В свою очередь, для этого α, используя равенство (1.10), выбираем $\gamma > 0$ таким, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (\mathrm{mes}\{s \in [t,t+1] \colon \omega_\gamma[f(s,\cdot), \mathfrak{X}] \geqslant \frac{\alpha}{3}\}) < \frac{\varepsilon}{8\mathfrak{x}}. \tag{5.8}$$

По этому γ строим конечную γ-сеть $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset \mathfrak{X}$ компакта $\mathfrak{X}$ и фиксируем произвольное τ, принадлежащее плотному множеству

$$\bigcap_{j=1}^{p} E_S(f(\cdot, x_j), \frac{\alpha^2}{12p\mathfrak{x}}). \tag{5.9}$$

Кроме того, для каждого $t \in \mathbb{R}$ на $[t, t+1]$ фиксируем такое измеримое отображение $s \mapsto x(s) \in \mathcal{N}(s)$, что для п. в. $s \in [t, t+1]$

$$\max_{x \in \mathcal{N}(s)} \rho(x, \mathcal{W}(s+\tau, \alpha)) = \rho(x(s), \mathcal{W}(s+\tau, \alpha)),$$

и полагаем

$$\mathfrak{T}(t, \alpha) \doteq \{s \in [t, t+1] : x(s) \in \mathcal{W}(s+\tau, \alpha)\}.$$

В силу (5.4) очевидно, что

$$[t, t+1] \setminus \mathfrak{T}(t, \alpha) = \{s \in [t, t+1] : \|f(s+\tau, x(s))\| > \alpha)\}.$$

Введем, наконец, в рассмотрение множества

$$\mathcal{M}_j(t) \doteq \{s \in [t, t+1] : \rho(x_j, x(s)) < \gamma\}, \ j = 1, \ldots, p,$$

и по ним построим дизъюнктную систему множеств

$$T_1(t) \doteq \mathcal{M}_1(t), \ T_j(t) \doteq \mathcal{M}_j(t) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{M}_k(t), \ j = 2, \ldots, p,$$

объединение которых есть $[t, t+1]$.

Теперь, принимая во внимание, что $x(s) \in \mathcal{N}(s)$, а значит, $f(s, x(s)) = 0$, $s \in [t, t+1]$, неравенство (5.8) и выбор τ, получаем следующие соотношения:

$$\int_t^{t+1} \max_{x \in \mathcal{N}(s)} \rho(x, \mathcal{W}(s+\tau, \alpha))\, ds = \int_t^{t+1} \rho(x(s), \mathcal{W}(s+\tau, \alpha))\, ds =$$

$$= \int_{[t,t+1]\setminus\mathfrak{T}(t,\alpha)} \rho(x(s), \mathcal{W}(s+\tau,\alpha))\, ds \leqslant \mathfrak{r}\ \mathrm{mes}([t,t+1]\setminus\mathfrak{T}(t,\alpha)) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{r} \sum_{j=1}^{p} \mathrm{mes}\{s \in T_j(t) : \|f(s,x_j) - f(s,x(s))\| +$$

$$+\|f(s+\tau,x_j) - f(s,x_j)\| + \|f(s+\tau,x(s)) - f(s+\tau,x_j)\| > \alpha\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{r} \sum_{j=1}^{p} (\mathrm{mes}\{s \in T_j(t) : \omega_\gamma[f(s+\tau,\cdot),\mathfrak{X}] \geqslant \frac{\alpha}{3}\} +$$

$$+ \mathrm{mes}\{s \in T_j(t) : \|f(s+\tau,x_j) - f(s,x_j)\| > \frac{\alpha}{3}\} +$$

$$+ \mathrm{mes}\{s \in T_j(t) : \omega_\gamma[f(s,\cdot),\mathfrak{X}] \geqslant \frac{\alpha}{3}\}) \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathfrak{r} \sup_{t\in\mathbb{R}} (\mathrm{mes}\{s \in [t,t+1] : \omega_\gamma f(s,\cdot),\mathfrak{X}] \geqslant \frac{\alpha}{3}\}) +$$

$$+\frac{3\mathfrak{r}}{\alpha} \sum_{j=1}^{p} d(f(\cdot+\tau,x_j), f(\cdot,x_j)) < 2\mathfrak{r} \cdot \frac{\varepsilon}{8\mathfrak{r}} + \frac{3p\mathfrak{r}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{12p\mathfrak{r}} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\alpha}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора точки $t \in \mathbb{R}$ получаем следующее неравенство:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{x\in\mathcal{N}(s)} \rho(x, \mathcal{W}(s+\tau,\alpha))ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{x\in\mathcal{N}(s+\tau)} \rho(x, \mathcal{W}(s,\alpha))\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \Delta_\alpha(s,s+\tau)\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, в силу неравенств (5.6) и (5.7), $d_{\mathrm{dist}_\rho}(\mathcal{N}_\tau(\cdot),\ \mathcal{N}(\cdot)) < \varepsilon$. Таким образом, доказано, что для каждого $\varepsilon > 0$ относительно плотное множество (5.9) содержится в $E_S(\mathcal{N},\varepsilon)$, т.е. $\mathcal{N}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{X}))$ и при этом

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{N})\subset \mathrm{Mod}(\bigcup_{j=1}^{p}\Lambda(f(\cdot,x_j)))\subset \mathrm{Mod}(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Lambda(f(\cdot,x))).$$

Первое утверждение теоремы 5.1 доказано. Второе утверждение есть следствие первого утверждения и результатов работ [65; 55].

З а м е ч а н и е 5.1. Рассматриваем в дальнейшем каждое множество $\mathfrak{K}\in\mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ как подпространство компактного метрического пространства $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}),\rho_w)$ и $\mathrm{comp}(\mathfrak{K})$ будем считать, соответственно, подпространством метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})),\mathrm{dist}_w)$, где $\mathrm{dist}_w\doteq\mathrm{dist}_{\rho_w}$. Аналогично множество $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ будем рассматривать как компактное метрическое пространство $(\mathfrak{U},\rho_m)$ и $(\mathrm{comp}(\mathfrak{U}),\mathrm{dist})$ — подпространство метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m),\mathrm{dist})$, в котором $\mathrm{dist}\doteq\mathrm{dist}_{\rho_m}$. С учетом сказанного рассматриваем также и множества $S(\mathbb{R},\mathfrak{K})\subset S(\mathbb{R},(\mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})),d_{\mathrm{dist}_w}))$ и $S(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{U}))\subset S(\mathbb{R},(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m),d_{\mathrm{dist}}))$.

Теперь для удобства ссылок приведем в виде следствий теорему 5.1 при конкретном выборе $\mathfrak{X}$.

С л е д с т в и е 5.1. *Пусть функция* $\mathfrak{g}\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, $\mathfrak{K}\in\mathrm{comp}(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *и*

$$\mathcal{N}(t)=\mathcal{N}(t;\mathfrak{K})\doteq\{\nu\in\mathfrak{K}\colon\ \langle\nu,\mathfrak{g}(t,u)\rangle=0\},\qquad(5.10)$$

$$\mathcal{W}(t,\alpha)=\mathcal{W}(t,\alpha;\mathfrak{K})\doteq\{\nu\in\mathfrak{K}\colon\ |\langle\nu,\mathfrak{g}(t,u)\rangle|\leqslant\alpha\},\qquad(5.11)$$

где $t\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$. *Тогда если* $\mathcal{N}(t)\neq\varnothing$ *при п.в.* $t\in\mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}d_{\mathrm{dist}_w}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha),\ \mathcal{N}(\cdot))=0$, *то* $\mathcal{N}\in S(\mathbb{R},\mathfrak{K})$, *существует такое* $\mu\in APM_1$, *что* $\mu(t)\in\mathcal{N}(t)$ *для п.в.* $t\in\mathbb{R}$ *и выполняются включения* $\mathrm{Mod}(\mu)\subset\mathrm{Mod}(\mathcal{N})\subset\mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение $(t,\nu)\mapsto\widehat{f}(t,\nu)\doteq\langle\nu,\mathfrak{g}(t,u)\rangle$, $(t,\nu)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{K}$. Так как функция

$\mathfrak{g} \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, то из неравенства

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{\nu\in\mathfrak{K}} |\widehat{f}(s+\tau,\nu) - \widehat{f}(s,\nu)|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u\in\mathfrak{U}} |\,\mathfrak{g}(s+\tau,u) - \mathfrak{g}(s,u)|\, ds, \ (\tau\in\mathbb{R})$$

вытекает, что $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{K}, \mathbb{R}^n))$ и (здесь см. следствие 1.1 и равенство (1.6) при $\mathfrak{X} = \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}$)

$$\mathrm{Mod}(\bigcup_{\nu\in\mathfrak{K}} \Lambda(\widehat{f}(\cdot,\nu))) = \mathrm{Mod}(\widehat{f}) \subset \mathrm{Mod}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Mod}(\bigcup_{u\in\mathfrak{U}} \Lambda(\mathfrak{g}(\cdot,u))).$$

Кроме того, по следствию 1.2 функция $\widehat{f}$ удовлетворяет условию A). Теперь, взяв в теореме 5.1 $(\mathfrak{X},\rho) = (\mathfrak{K},\rho_w)$, $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ и $f = \widehat{f}$, получим утверждение следствия 5.1.

С л е д с т в и е 5.2. *Пусть* $\mathfrak{g} \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$ *и*

$$N(t) = N(t;\mathfrak{U}) \doteq \{u\in\mathfrak{U}\colon\ \mathfrak{g}(t,u) = 0\},\ t\in\mathbb{R}, \tag{5.12}$$
$$W(t,\alpha) \doteq \{u\in\mathfrak{U}\colon\ |\,\mathfrak{g}(t,u)| \leqslant \alpha\},\ t\in\mathbb{R}\ (\alpha>0). \tag{5.13}$$

Тогда если $N(t)\neq\varnothing$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha), N(\cdot)) = 0$, *то* $N\in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathfrak{U}))$, *существует такая функция* $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, *что* $u(t)\in N(t)$ *для п. в.* $t\in\mathbb{R}$ *и выполняются включения* $\mathrm{Mod}(u)\subset\mathrm{Mod}(N)\subset\mathrm{Mod}(\mathfrak{g})$.

З а м е ч а н и е 5.2. По лемме 2.1 функция $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ является сечением отображения N в том и только в том случае, если $\mu(\cdot) = \delta_{u(\cdot)} \in APM_1^{(1)}$ будет сечением отображения $\mathcal{N}(\cdot; DIR(\mathfrak{U}))$. Более того, $N\in S(\mathbb{R},\mathrm{comp}(\mathfrak{U}))$ в том и только в том случае, если $\mathcal{N}(\cdot; DIR(\mathfrak{U})) \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(DIR(\mathfrak{U})))$. Таким образом, если существует функция $u\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$, являющаяся сечением отображения N, то отображение $\delta_{u(\cdot)}\in APM_1^{(1)}$ будет сечением отображения $\mathcal{N}(\cdot;\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$. Следующий пример показывает, что отображение $\mathcal{N}(\cdot;\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ может иметь сечения, принадлежащие APM_1, тогда как у $N(\cdot)$ может и не быть сечений из $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$.

П р и м е р 5.3. Пусть $\mathfrak{U} \doteq \{(u_1,u_2)\colon |u_1| = 1, |u_2| \leqslant 1\}$ и $\mathfrak{g}(t,u) \doteq u_1(|\,\mathfrak{f}(t)| - \mathfrak{f}(t)u_2)$, $(t,u) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{U}$, где $\mathfrak{f} \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ определяется равенством (5.3) из примера 5.1. Функция $\mathfrak{g} \in B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и (см. (5.12)) $N(t) = \{(\pm1, \operatorname{sign}\mathfrak{f}(t))\}$ для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $\operatorname{sign}\mathfrak{f} \notin S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то у $N(\cdot)$ нет п. п. по Степанову сечений. С другой стороны, отображение $t \mapsto \mathcal{N}(t;\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, $t \in \mathbb{R}$ содержит, по крайней мере, сечение $\mu(t) = \frac{1}{2}(\delta_{u_1(t)} + \delta_{u_2(t)})$, где $u_k(t) = ((-1)^k, u(t))$, $k = 1,2$, $t \in \mathbb{R}$ и где, в свою очередь, $u(\cdot)$ — любая функция из $S(\mathbb{R},[-1,1])$.

Сейчас, используя следствие 5.2, докажем следующее достаточное условие п. п. по Степанову функции $\operatorname{sign}\mathfrak{f}$, эквивалентное σ-свойству функции f [70. С. 504].

Л е м м а 5.1. *Пусть функция* $f \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и*

$$I(\beta) \doteq \{t \in \mathbb{R}\colon |f(t)| \leqslant \beta\} \quad (\beta > 0).$$

Тогда если

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\bigl(\sup_{t\in\mathbb{R}}(\mathrm{mes}([t,t+1]\bigcap I(\beta))\bigr) = 0, \tag{5.14}$$

то $\operatorname{sign} f \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $\mathrm{Mod}(\operatorname{sign} f) \subset \mathrm{Mod}(f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{g}(t,u) \doteq |f(t)| - f(t)u,\ (t,u) \in \mathbb{R}\times[-1,1].$$

Так как $f \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то $\mathfrak{g} \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U},\mathbb{R}))$ и $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Mod}(f)$. Далее для данной функции (см.(5.12), (5.13)) $N(t) = \{\operatorname{sign} f(t)\}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, $W(t,\alpha) = \{u \in [-1,1]\colon |f(t)| - f(t)u \leqslant \alpha\}$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, если $u_\alpha \in W(t,\alpha)$, то

$$u_\alpha \in \begin{cases} [1 - \frac{\alpha}{f(t)}, 1], & \text{если } f(t) > 0,\\ [-1, -1 - \frac{\alpha}{f(t)}], & \text{если } f(t) < 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$, в силу (5.14), найдется такая константа $\beta > 0$, при которой будет выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\big(\mathrm{mes}([t,t+1]\bigcap I(\beta))\big) < \frac{\varepsilon}{4}$. Поэтому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|u_\alpha(s)-\operatorname{sign}f(s)|ds \leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\big(\mathrm{mes}([t,t+1]\bigcap I(\beta))\big) + \\ +\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{[t,t+1]\setminus I(\beta)}|u_\alpha(s)-\operatorname{sign}f(s)|ds < \frac{\varepsilon}{2} + \\ +\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{[t,t+1]\setminus I(\beta)}|u_\alpha(s)-\operatorname{sign}f(s)|ds.$$

Далее, если $s\in[t,t+1]\setminus I(\beta)$, то $|f(s)|>\beta$ и, следовательно, в силу (5.15) $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}u_\alpha(s) = \operatorname{sign}f(s)$. Поэтому из полученного выше соотношения вытекает, что при всех достаточно малых $\alpha>0$ $d(u_\alpha(\cdot),\ \operatorname{sign}\ f(\cdot)) < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha),N(\cdot)) = 0.$ По следствию 5.2 отображение $t\mapsto N(t) = \{\operatorname{sign}\ f(t)\}$ п. п., а значит, и функция $\operatorname{sign}\ f(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, и всюду далее, если не оговорено специально, рассматриваем отображение $(t,x,u)\mapsto f(t,x,u)\in\mathbb{R}^n$, $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times G\times\mathfrak{U}$ такое, что для любого $K\in\mathrm{comp}(G)$ функция $f\in S(\mathbb{R},C(K\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$.

Л е м м а 5.2. *Для всякого* $K\in\mathrm{comp}(G)$ *и* $\mu\in APM_1$ *отображение*

$$(t,x)\mapsto\langle\mu(t),f(t,x,u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}}f(t,x,u)\mu(t)(du) \qquad (5.16)$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(K,\mathbb{R}^n))$. *Кроме того, для всякой функции* $x\in B(\mathbb{R},G)$, *такой, что* $\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset G$, *отображение* $t\mapsto\langle\mu(t),f(t,x(t),u)\rangle\in\mathbb{R}^n$ *п. п. по Степанову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции f рассмотрим при каждом $h>0$ ее стекловское усреднение

$$(t,x,u)\mapsto f_h(t,x,u)\doteq\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(s,x,u)ds\in\mathbb{R}^n,$$

принадлежащее пространству $B(\mathbb{R}\times K\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ и, стало быть, ограниченное на множестве $\mathbb{R}\times K\times\mathfrak{U}$. Полагаем далее

$$\mathfrak{f}_h(t,x)\doteq\langle\mu(t),f_h(t,x,u)\rangle,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times K.$$

Поскольку при всяком $\sigma>0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\big(\mathrm{mes}\{s\in[t,t+1]\colon\ \omega_\gamma[\mathfrak{f}_h(s,\cdot),K]>\sigma\}\big)<$$
$$<\frac{1}{\sigma}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[\mathfrak{f}_h(s,\cdot),K]ds\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\omega_\gamma[f(s,\cdot,\cdot),K\times\mathfrak{U}]ds,$$

а $f\in S(\mathbb{R},C(K\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, то (см. лемму 1.3) ограниченное на $\mathbb{R}\times K$ отображение $(t,x)\mapsto\mathfrak{f}_h(t,x)$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times K$ удовлетворяет условию А) и, кроме того, (см. следствие 2.3) при каждом $x\in K$, $\mathfrak{f}_h(\cdot,x)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Стало быть, по лемме 1.4 при каждом $h>0$ $\mathfrak{f}_h\in S(\mathbb{R},C(K,\mathbb{R}^n))$. Пусть далее $\mathfrak{f}(t,x)\doteq\langle\mu(t),f(t,x,u)\rangle$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times K$. Поскольку при каждом $h>0$ и любом τ

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in K}|\,\mathfrak{f}(s+\tau,x)-\mathfrak{f}(s,x)|ds\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in K\times\mathfrak{U}}|f(s+\tau,x,u)-f_h(s,x,u)|ds+$$
$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{x\in K}|\mathfrak{f}_h(s+\tau,x)-\mathfrak{f}_h(s,x)|ds,$$

то (см. теорему 1.2) из равенства

$$\lim_{h\downarrow 0}(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(x,u)\in K\times\mathfrak{U}}|f(s,x,u)-f_h(s,x,u)|ds)=0$$

и включения $\{\mathfrak{f}_h,h>0\}\subset S(\mathbb{R},C(K,\mathbb{R}^n))$ получаем первое утверждение леммы 5.2. Далее, т. к. $x\in B(\mathbb{R},G)$, то множество $K\doteq\overline{\mathrm{orb}}(x)\in\mathrm{comp}(G)$. По доказанному выше функция $(t,u)\mapsto f(t,x(t),u)=\int_K f(t,x,u)\delta_{x(t)}(dx)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, а значит, по следствию 2.3 функция $t\mapsto\langle\mu(t),f(t,x(t),u)\rangle$ п. п. по Степанову.

Л е м м а 5.3. *Пусть функция* $x \in B(\mathbb{R}, G)$ *и* $\overline{\mathrm{orb}}(x) \subset G$. *Тогда отображения* $t \mapsto f(t, x(t), \mathfrak{U})$, $t \mapsto \mathrm{co}\, f(t, x(t), \mathfrak{U})$ *принадлежат пространствам* $S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n))$ *и* $S(\mathbb{R}, \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n))$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $K \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x)$. Поскольку $x \in B(\mathbb{R}, G)$, то $K \in \mathrm{comp}(G)$ и, т.к. f принадлежит $S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$, то по лемме 1.3 для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что $I(\gamma) \doteq \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \omega_\gamma[f(s, \cdot, \cdot, K \times \mathfrak{U})] ds < \frac{\varepsilon}{2}$ и множество $E_B(x, \mathfrak{y}) \bigcap (\bigcap\limits_{(z,u) \in K \times \mathfrak{U}} E_S(f(\cdot, z, u), \mathfrak{y}))$, где $\mathfrak{y} \doteq \min(\frac{\varepsilon}{2}, \gamma)$, относительно плотно. Пусть τ принадлежит этому множеству. Теперь для каждого $t \in \mathbb{R}$ фиксируем такую измеримую функцию $u \colon [t, t+1] \to \mathfrak{U}$, что

$$\max_{\mathfrak{f} \in f(s, x(s), \mathfrak{U})} \rho_n(\mathfrak{f}, f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})) = \\ = \rho_n(f(s, x(s), u(s)), f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})).$$

Теперь из соотношений

$$\int_t^{t+1} \rho_n(f(s, x(s), u(s)), f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})) ds \leqslant \\ \leqslant \int_t^{t+1} |f(s, x(s), u(s)) - f(s+\tau, x(s+\tau), u(s)| ds + \\ + \int_t^{t+1} |f(s+\tau, x(s), u(s)) - f(s+\tau, x(s+\tau), u(s)| ds \leqslant \\ \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{(x,u) \in K \times \mathfrak{U}} |f(s+\tau, x(s+\tau), u(s) - f(s, x(s), u(s))| ds + \\ + I(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

вытекает, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{\mathfrak{f} \in f(s, x(s), \mathfrak{U})} \rho_n(\mathfrak{f}, f(s+\tau, x(s+\tau), \mathfrak{U})) ds \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично показываем, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{\mathfrak{f}\in f(s+\tau,x(s+\tau),\mathfrak{U})}\rho_n(\mathfrak{f},f(s,x(s),\mathfrak{U})),\mathfrak{U}))ds\leqslant\varepsilon.$$

Из последних двух неравенств вытекает, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\operatorname{dist}(f(s,x(s),\mathfrak{U}),f(s+\tau,x(s+\tau),\mathfrak{U}))ds\leqslant\varepsilon.$$

Тем самым первая часть леммы 5.3 доказана. Далее из неравенства $\operatorname{dist}(\mathrm{co}A,\mathrm{co}B)\leqslant\operatorname{dist}(A,B),\ \ A,B\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ вытекает второе утверждение этой леммы.

Рассмотрим п. п. по Степанову (см. лемму 5.2) систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\langle\mu(t),f(t,x,u)\rangle,\ \ \mu(\cdot)\in APM_1,\ \ (t,x)\in\mathbb{R}\times G \tag{5.17}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x}\in\mathrm{co}f(t,x,\mathfrak{U}),\ \ (t,x)\in\mathbb{R}\times G \tag{5.18}$$

с п. п. по Бору (см. лемму 5.3) правой частью.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть функция* $x\in B(\mathbb{R},G)$ *является решением системы* (5.17), *отвечающим некоторому* $\mu\in APM_1$ *и* $\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset G$. *Тогда она является также и решением включения* (5.18), *т. е.* $\dot{x}(t)\in\mathrm{co}f(t,x(t),\mathfrak{U})$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 5.2 практически совпадает с доказательством соответствующего утверждения в измеримом случае (см.,например, [36]) и мы его опускаем.

Отметим далее, что, в отличие от измеримого случая, вообще говоря, нельзя утверждать, что если $x(\cdot)$ — п. п. по Бору решение включения (5.18), то оно будет и решением системы (5.17) при некотором $\mu\in APM_1$.

П р и м е р 5.4. Пусть $f(t,x,u) \doteq x+|\,\mathfrak{f}(t)|-\mathfrak{f}(t)u$, при всех $(t,x,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[-1,1]$, где функция $\mathfrak{f} \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ определена равенством (5.3). Тогда очевидно, что $x(t) \equiv 0$ есть решение дифференциального включения $\dot{x} \in x+|\,\mathfrak{f}(t)|-\mathfrak{f}(t)\cdot[-1,1]$. С другой стороны, равенство $|\,\mathfrak{f}(t)|-\langle\mu(t),\mathfrak{f}(t)u\rangle = 0$ возможно лишь при $\mu(t)=\delta_{\operatorname{sign}\mathfrak{f}(t)}$, а т.к. $\operatorname{sign}\mathfrak{f} \notin S(\mathbb{R},[-1,1])$, то по лемме 2.1 и $\mu \notin APM_1$.

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{C} \doteq \{\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\delta_{u_j},\ 0\leqslant\lambda_j\leqslant 1,\ u_j\in\mathfrak{U},\ j=1,\ldots,n+1,\ \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j=1\},$$

принадлежащее $\operatorname{conv}(rpm(\mathfrak{U}))$.

Т е о р е м а 5.3. *Пусть $x \in B(\mathbb{R},G)$ — такое решение дифференциального включения* (5.18), *что $\overline{\operatorname{orb}}(x) \subset G$ и $\dot{x} \in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Пусть отображения $t \mapsto \mathcal{N}(t)$, $t \mapsto \mathcal{W}(t,\alpha)$ определены равенствами* (5.10) *и* (5.11) *соответственно при $\mathfrak{K}=\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{g}(t,u)\doteq\dot{x}-f(t,x(t),u)$. Тогда если выполнено равенство $\lim\limits_{al\downarrow 0} d_{\operatorname{dist}_w}(\mathcal{W}(\cdot,\alpha),\mathcal{N}(\cdot))=0$, то существует такое $\widehat{\mu}\in APM_1$, что $\widehat{\mu}(t)\in\mathfrak{C}$ для п. в. $t\in\mathbb{R}$ и $x(\cdot)$ — решение системы уравнений* (5.17) *при $\mu(t)=\widehat{\mu}(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку f принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(K\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, где $K\doteq\overline{\operatorname{orb}}(x)$, то для заданного $\varepsilon>0$ найдется такое $\gamma>0$, что (см. принятое при доказательстве леммы 5.3 обозначение) $I(\gamma)<\varepsilon/3$ и множество

$$E_B(x,\mathfrak{y})\bigcap E_S(\dot{x},\mathfrak{y})\bigcap(\bigcap_{(z,u)\in K\times\mathfrak{U}}E_B(f(\cdot,z,u),\mathfrak{y})),\ \ \mathfrak{y}\doteq\min(\frac{\varepsilon}{3},\gamma)$$

относительно плотно. Далее, т.к. для каждого τ из этого множества

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{u\in\mathfrak{U}}|\,\mathfrak{g}(s+\tau,u)-\mathfrak{g}(s,u)|ds\leqslant d(\dot{x}_\tau,\dot{x})+$$

$$+\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\max_{(z,u)\in K\times\mathfrak{U}}|f(s+\tau,z,u)-f(s,z,u)|ds+I(\gamma)<\varepsilon,$$

то $\mathfrak{g}\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$. Теперь утверждение теоремы 5.3 вытекает из следствия 5.1 при $\mathfrak{K}=\mathfrak{C}$.

Рассмотрим далее п. п. по Степанову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,x,u(t)),\ u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U}),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G \tag{5.19}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x}\in f(t,x,\mathfrak{U}),\ (t,x)\in\mathbb{R}\times G \tag{5.20}$$

с п. п. по Бору (см. лемму 5.3) правой частью.

Очевидно, что всякое п. п. по Бору решение системы (5.19) является решением включения (5.20). Обратное утверждение (см. пример 5.4), вообще говоря, неверно. В связи с этим приведем следующую теорему, вытекающую из следствия 5.2.

Т е о р е м а 5.4. *Пусть* $x(\cdot)\in B(\mathbb{R},G)$ *— такое решение дифференциального включения* (5.20), *что* $\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset G$ *и* $\dot{x}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. *Пусть, далее, отображения* $t\mapsto N(t), t\mapsto W(t,\alpha)$ *определены равенствами* (5.12) *и* (5.13) *соответственно при* $\mathfrak{g}(t,u)\doteq\dot{x}(t)-f(t,x(t),u)$. *Тогда, если выполнено равенство* $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}d_{\mathrm{dist}}(W(\cdot,\alpha),N(\cdot))=0$, *то существует такое* $\widehat{u}(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *что* $x(\cdot)$ *будет являться решение системы уравнений* (5.19) *при* $u(t)=\widehat{u}(t)$.

Список литературы

1. Тонков Е. Л. Оптимальные периодические движения управляемой системы // Математическая физика. 1977. Вып. 21. С. 45–59.
2. Halanay A. Optimal control of periodic solution // Rev. Roumaine de mat. Pures et appl. 1974. V. 19, Ѓ 1. P. 3–16.
3. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.

4. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Оптимальное управление с усредненным вдоль траектории функционалом // ПММ. 1985. Т. 49, Ѓ 4. С. 525–536.
5. Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Некоторые математические задачи, связанные с одной моделью химического катализа // Изв. Ин-та матем. и информ./ УдГУ. Ижевск. 1997. Ѓ 1(9). С. 3–62.
6. Гайцгори В. Г. Управление системами с быстрыми и медленными движениями. М.: Наука, 1991. 224 с.
7. Зубов В. И. Теория колебаний. М.: Высш. шк., 1979. 400 с.
8. Horn J., Lin R. C. Periodic Processes: A Variational Approach // Eng. Chem. Process Desing and Development, 1967. V. 6, Ѓ 1. P. 21–30.
9. Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Об оптимальном управлении периодическими колебаниями некоторых процессов химического катализа // Нестационарные процессы в катализе: Тр. конф. Новосибирск, 1987. С. 212–225.
10. Дукельский М. С., Цирлин А. М. Условия нестационарности установившегося режима управляемого объекта // Автоматика и телемеханика. 1977, Ѓ 8. С. 5–12.
11. Петрова В. В., Тонков Е. Л. Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений // Изв. вузов. Математика. 1996, Ѓ 11. С. 65–71.
12. Перов А. И., Тананика А. А. Об одном геометрическом результате в вопросах периодической оптимизации // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, Ѓ 4. С. 718–721.
13. Перов А. И., Белоусова Е. П. Об одной нелинейной задаче периодической оптимизации / Воронеж. ун-т. Воронеж, 1995. 23 с. Деп. в ВИНИТИ 09.08.95, Ѓ 2409-95.
14. Тонков Е. Л. Оптимальные периодические движения управляемой системы // Математическая физика. 1977. Вып. 22. С. 54–64.
15. Тонков Е. Л. Линейная задача оптимального управления периодическими решениями // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, Ѓ 6. С. 1007–1011.
16. Тонкова В. С. Вопросы эффективного расширения задач математического программирования // Методы вычислительного эксперимента в инженерной практике. Ижевск.: ИММ, 1991. Вып. 1. С. 90–99.
17. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
18. Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г. Вариационные

методы оптимизации управляемых объектов. М.: Энергия, 1976. 448 с.

19. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
20. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1978. 348 с.
21. Guardabassi G., Locatelli A., Rinaldi S. The status of periodic optimization of dynamic systems // J. Optimization Theory and Appl., 1974. V. 14, Ѓ 1. P. 1–20.
22. Gilbert E. G. Optimal Periodic Control: a General Theory of Necessary Conditions // SIAM J. Contr. Optimisation. 1977. V. 15, Ѓ 5. P. 717–746.
23. Bittanti S., Locatelli A., Guardabassi G. Periodic control: A frequency domain approach // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. V.18, Ѓ 1. P. 33–34.
24. Bittanti S., Locatelli A., Maffezoni C. Second-variation mehhods in periodic optimisation // J. Optim. Theory and Appl. 1974. V. 14, Ѓ 14. P. 31–49.
25. Markus L. Optimal control of limit cycles or what control theory can do to cure a heart attack or to cause one // Lect. Notes Math. 1973. V. 312. P. 108–134.
26. Chang K. S. Necessary and sufficient conditions for optimality. Periodic optimization. New York: Springer-Verlag, 1972. P. 183–217.
27. Иванов А. Г., Тонков Е.Л. Задача оптимального управления периодическими процессами и ее расширения // Функц. дифференц. уравнения. Пермь, 1992. С. 35–49.
28. Panasjuk A., Panasjuk V. Die wichtigsten Leitsatze der magistralen asymptotischen Theorie der optimalen Steuerung // 27 Intern. Wiss. Kolloq., Ilmenau, 1982. H.5. Vortragsz. B1, B2. Ilmenau, s. a. P. 99–104.
29. Иванов А. Г. О существовании почти периодического решения линейной системы с квадратичным функционалом качества // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, Ѓ 2. С. 203–211.
30. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
31. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
32. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 205 с.

33. Иванов А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние // Докл. РАН 1995. Т. 343, Ѓ 6. С. 51–53.
34. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
35. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
36. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
37. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. 230 с.
38. Дмитрук А. В. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями // Оптимальность управляемых динамических систем. Вып. 14. М.: ВНИИСИ, 1990. С. 26–42.
39. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
40. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
41. Ченцов А. Г. Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1985. 128 с.
42. Ченцов А. Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: Наука, 1993. 232 с.
43. Иванов А. Г. Мерозначные почти периодические функции. Препринт. Свердловск, 1990. 53 с.
44. Иванов А. Г. Мерозначные почти периодические функции. II / УдГУ. Ижевск, 1991. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 24.04.91, Ѓ 1721-В 91.
45. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. I. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, Ѓ 2. С. 167–176.
46. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. II. // Дифференц. уравнения. 1997 . Т. 33, Ѓ 3. С. 316–323.
47. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и

неравенств. III. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, Ѓ 4. С. 478–485.

48. Иванов А. Г. О почти-периодической ляпуновской задаче // ПММ. 1991. Т. 55, вып. 5. С. 718–724.
49. Иванов А. Г. Об оптимальном управлении почти периодическими движениями // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 5. С. 745–753.
50. Иванов А. Г. Об эквивалентности дифференциальных включений управляемых почти периодических систем // Дифференц. уравнения. 1997 . Т.33, Ѓ 7. С. 876–884.
51. Иванов А. Г. О непрерывной дифференцируемости по параметру почти периодического решения // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, Ѓ 4. С. 478–487.
52. Иванов А. Г. О непрерывной зависимости почти периодического решения от мерозначного управления // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, Ѓ 11. С. 1907–1915.
53. Иванов А. Г. Об одном свойстве почти периодического интеграла, зависящего от параметра // Изв. вузов. Математика. 2001. Ѓ 6(469). С. 34–43.
54. Данилов Л. И. О мерозначных почти периодических функциях // Вестн. Удм. ун-та. 1992. Вып. 1. С. 51–58.
55. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Изв. Ин-та матем. и информ./ УдГУ. Ижевск, 1993. Вып. 1. С. 16–78.
56. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Изв. вузов. Математика. 1998. Ѓ 5. С. 10–18.
57. Fink A. M. Almost periodic differential equation // Lect. Notes Math. 1974. V. 377. 336 p.
58. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
59. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ: Курс лекций. Киев: Вища школа, 1990. 600 с.
60. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Иностр. лит., 1962.
61. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
62. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж, 1986. 104 с.

63. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.
64. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
65. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32, Ѓ 2. С. 172–175.
66. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 352 с.
67. Иванов А. Г. Элементы аппарата задач управления почти периодическими движениями. I / УдГУ. Ижевск, 2001. 49 с. Деп. в ВИНИТИ 28.06.2001, Ѓ 1536-В 91.
68. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measure able multifunction // Lect. Notes Math., Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York, 1977. V. 459. 279 p.
69. Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Математика. 1994. Ѓ 6. С. 50–59.
70. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 522 с.

УДК 517.977

Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I. Иванов А.Г. // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 1(24). С. 3–100.

Приводятся основные определения и утверждения о мерозначных почти периодических по Степанову функций, которые используются при исследовании задач оптимального управления почти периодическими движениями.

Библиогр. 70