Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 517.929

 О.В. Бабич
lg@parc.uni.udm.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРЕРЫВИСТОЙ МАТРИЦЕЙ

Ключевые слова: прерывистые функции, обобщенные обратные матрицы.

Abstract. The matrix Moore-Penrose inverse belonging to the regulated functions space conditions are obtained. The linear equations system with regulated matrix solvability in regulated functions is proved.

Определение 1. Обобщенной обратной матрицей Мура-Пенроуза к $m \times n$-матрице C называется $n \times m$-матрица Y, удовлетворяющая равенствам

$$CYC = C,\ YCY = Y,\ (YC)^{\top} = YC,\ (CY)^{\top} = CY.$$

Обобщенная обратная Мура-Пенроуза к матрице C единственна, будем обозначать ее через C^{+}.

Теорема 1. [3, 4]. *Если матричная последовательность $\{C_n\}$ сходится поэлементно к матрице C при $n \to \infty$, то поэлементная сходимость последовательности $\{C_n^{+}\}$ к C^{+} эквивалентна условию существования номера N, начиная с которого для всех n справедливо равенство*

$$\operatorname{rank} C_n = \operatorname{rank} C.$$

Пусть H, K — гильбертовы пространства.

О п р е д е л е н и е 2. Оператор $Q^+ : K \to H$, где $\mathcal{D}(Q^+) = \mathcal{R}(Q) \otimes (\mathcal{R}(Q))^\perp$, определенный равенством $Q^+y = x_y$, x_y — единственный элемент с минимальной нормой множества решений задачи

$$Q^*(Qx - y) = 0, \ x \in H, \ y \in K,$$

называется обобщенным обратным к $Q : H \to K$.

Здесь $\mathcal{D}(Q)$ — область определения, $\mathcal{R}(Q)$ — область значений оператора Q, Q^* — оператор, сопряженный к Q.

Т е о р е м а 2. [2]. *Пусть* A_k $(k = 1, 2, \dots)$, A — *ограниченные операторы из* H *в* K, $A_k \to A$ *при* $k \to \infty$ *и существуют* A_k^+ $(k = 1, 2, \dots)$ *и* A^+. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $A_k^+ \to A^+$ *при* $k \to \infty$;
2) $\sup\limits_k \|A_k^+\| < \infty$.

О п р е д е л е н и е 3. Функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, имеющие в любой точке t интервала (a, b) конечные пределы слева и справа, а в точках a и b — пределы справа и слева соответственно, называются прерывистыми. Множество всех прерывистых на отрезке $[a, b]$ функций обозначается $\mathrm{G}[a, b]$.

Любая прерывистая функция ограничена и имеет не более чем счетное число точек разрыва [1].

Как видно из следующего примера, наличие элемента матрицы $C(t)$, стремление которого к нулю в точке отрезка $[0, 1]$ вызывает изменение ранга матрицы, приводит при построении обобщенной обратной матрицы $C^+(t)$ к неизбежному появлению элемента, стремящегося к ∞ при приближении аргумента к этой же точке отрезка $[0, 1]$. Таким образом, матрица $C(t)$ имеет прерывистые элементы, в то время как элементы матрицы $C^+(t)$ не являются прерывистыми.

П р и м е р 1. Пусть на отрезке $[0,1]$ заданы функции

$$\alpha(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, \ t > 0, \\ 1, \ t = 0, \end{cases} \quad , \quad \omega(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t}, \ t > 0, \\ 1, \ t = 0, \end{cases}$$

и матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда $C^+(t)$ имеет вид

$$C^+(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega(t) \end{pmatrix}.$$

Чтобы избежать такого рода ситуаций, можно ограничиться рассмотрением только таких матриц $C(t) \in \mathrm{G}^{m\times n}[0,1]$, что $C^+(t) \in \mathrm{G}^{n\times m}[0,1]$.

Л е м м а 1. *Если* $C(\cdot) \in \mathrm{G}^{m\times n}[a,b]$, *то* $C^+(\cdot) \in \mathrm{G}^{n\times m}[a,b]$ *в том и только том случае, когда для любой точки отрезка* $[a,b]$ *в достаточно малых односторонних окрестностях матрица* $C(\cdot)$ *имеет ранги, совпадающие с рангами соответствующих односторонних пределов матричной функции* $C(\cdot)$ *в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в точке t_0 матрица $C(t)$ меняет ранг. Рассмотрим произвольную одностороннюю последовательность точек $t_k \to t_0$ $(k \to \infty)$ и обозначим $C_0 = \lim\limits_{t_k\to t_0} C(t_k)$. Предположим, что какое бы мы не взяли число k, найдется номер $k_0 \geqslant k$, такой что $\operatorname{rank} C(t_{k_0}) \neq \operatorname{rank} C_0$. Тогда, с одной стороны, $C(t_k) \to C_0$, а с другой стороны, по теореме 1 $C^+(t_k)$ не стремится к C_0^+. В качестве нормы матрицы $C(t_k)$ рассмотрим норму вектора из $\mathbb{R}^{m\times n}$, составленного из столбцов матрицы $C(t_k)$. Согласно теореме 2 справедливо равенство $\sup\limits_k \|C^+(t_k)\| = \infty$. Это означает, что по крайней мере один из элементов матрицы $C^+(\cdot)$ стремится к ∞, но это противоречит условию $C^+(\cdot) \in \mathrm{G}^{n\times m}[a,b]$. Таким образом, начиная с некоторого номера k_0, $\operatorname{rank} C(t_k) = \operatorname{rank} C_0$, и по теореме 1 $C^+(t_k) \to C_0^+$. Поскольку все расуждения обратимы, то доказательство достаточности проводится аналогично.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $C(\cdot) \in \mathrm{G}^{m\times n}[a,b]$. Если $C^+(\cdot)$ принадлежит $\mathrm{G}^{n\times m}[a,b]$, то множество точек разрыва матрицы $C^+(\cdot)$ содержится в множестве точек разрыва $C(\cdot)$. Как видно из примера 1, обратное неверно.

Т е о р е м а 3. *Пусть E_n — единичная $n\times n$-матрица, $g(\cdot) \in \mathrm{G}^{m\times 1}[a,b]$, $z(\cdot) \in \mathrm{G}^{n\times 1}[a,b]$, $B(\cdot) \in \mathrm{G}^{m\times n}[a,b]$, и для любой точки отрезка $[a,b]$ в достаточно малых односторонних окрестностях матрица $C(\cdot)$ имеет ранги, совпадающие с рангами соответствующих односторонних пределов матричной функции $C(\cdot)$ в этой точке. Тогда*

1) *уравнение $B(\cdot)x(\cdot) = g(\cdot)$ разрешимо в том и только том случае, когда*

$$\big(E_m - B(\cdot)B^+(\cdot)\big)\, g(\cdot) = 0,$$

2) *если уравнение $B(\cdot)x(\cdot) = g(\cdot)$ разрешимо, то все его прерывистые решения даются формулой*

$$x(t) = B^+(t)\, g(t) + \big(E_n - B^+(t)\, B(t)\big)\, z(t),$$

где $z(\cdot)$ — произвольная вектор-функция.

Список литературы

1. Родионов В.И. О прерывистых функциях // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 2(25). С. 87–90.
2. Izumino S. Convergence of generalized inverses and spline projectors // J. Approx. Theory. 1983. Vol. 38. P. 269–278.
3. Penrose R. A generalized inverse of matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1955. Vol. 51. P. 406–413.
4. Stewart G.W. On the continuity of the generalized inverse // SIAM. 1969. Vol. 17. P. 33–45.