УДК 517.917

© **В. Н. Баранов**
baranov@ulm.uni.udm.ru

ТЕОРЕМА НАГУМО ДЛЯ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Ключевые слова: теория выживаемости, теорема Нагумо, уравнения с последействием.

Abstract. Analogue of theorem Nagumo about viability for Banach space is established. Concrete example is considered.

Пусть $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ и $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|_{\mathfrak{Y}})$ — банаховы пространства. В дальнейшем будем рассматривать только такие пространства, для которых выполнены следующие условия: $\mathfrak{X}$ — всюду плотное подмножество $\mathfrak{Y}$, и из сходимости в $\mathfrak{X}$ следует сходимость в $\mathfrak{Y}$. Кроме того, нам понадобится пространство абсолютно непрерывных функций $AC([-r,0],\mathbb{R}^n)$, а также $L_1([-r,0),\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ — декартово произведение пространства суммируемых функций и $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство с нормой $|\cdot|$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, где $t \in [0,\alpha]$, $\alpha > 0$, имеет в точке t вариацию $\delta x_t \in \mathfrak{Y}$, если существует отображение $\varepsilon \to r(\varepsilon) \in \mathfrak{Y}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$x_{t+\varepsilon} = x_t + \varepsilon\delta x_t + r(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\|r(\varepsilon)\|_{\mathfrak{Y}}}{\varepsilon} = 0.$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть M — непустое подмножество пространства $\mathfrak{X}$ и $x \in M$. Элемент $h \in \mathfrak{Y}$ называется

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00-1.0-5).

касательным направлением к M в точке x, если существует отображение $\varepsilon \to r(\varepsilon) \in \mathfrak{Y}$, удовлетворяющее следующим условиям: $x + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in M$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \dfrac{\|r(\varepsilon)\|_{\mathfrak{Y}}}{\varepsilon} = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \|\varepsilon h + r(\varepsilon)\|_{\mathfrak{X}} = 0$. Обозначим множество касательных направлений к M в точке x через $T_x^{\mathfrak{Y}} M$.

Л е м м а 1. *Пусть заданы подмножество M пространства $\mathfrak{X}$ и движение $t \to x_t \in M$, $t \in [0,\alpha]$, $\alpha > 0$. Пусть, далее, в каждой точке $t \in [0,\alpha)$ существует вариация δx_t движения x_t. Тогда для всякой точки $t \in [0,\alpha)$ имеет место включение $\delta x_t \in T_{x_t}^{\mathfrak{Y}} M$.*

Эта лемма доставляет нам необходимые условия ґвыживаемостиЄ движения $t \to x_t$ в заданном множестве M. Оказывается, что при некоторых дополнительных (но естественных с точки зрения приложений) условиях включение $\delta x_t \in T_{x_t}^{\mathfrak{Y}} M$ не только необходимо, но и достаточно для выживаемости движения $t \to x_t$ в M. Доклад посвящен обсуждению этих условий.

Для заданой функции $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\delta x_t = F(x_t), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы локально компактное подмножество M пространства $\mathfrak{X}$ и непрерывное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Пусть для каждого $x \in \partial M$ имеет место включение $F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. Тогда для любого $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и решение $t \to x_t$, $t \in (0,\alpha)$ уравнения* (1) *такие, что $x_0 = \varphi$ и $x_t \in M$ для всех $t \in [0,\alpha)$.*

Подобное утверждение имеет место и для дифференциальных включений. Сформулируем соответствующий результат.

Обозначим $\operatorname{conv} \mathfrak{Y}$ — метрическое (с метрикой Хаусдорфа) пространство непустых выпуклых компактных подмножеств, расположенных в $\mathfrak{Y}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть заданы локально компактное подмножество* M *пространства* $\mathfrak{X}$ *и полунепрерывное сверху отображение* $G : \mathfrak{X} \to \operatorname{conv} \mathfrak{Y}$. *Пусть для каждого* $x \in \partial M$ *выполнено условие* $G(x) \cap T_x^{\mathfrak{Y}} M \neq \varnothing$. *Тогда для любого* $\varphi \in M$ *существуют число* $\alpha > 0$ *и решение* $t \to x_t$, $t \in (0, \alpha)$ *функционально-дифференциального включения* $\delta x_t \in G(x_t)$ *такие, что* $x_0 = \varphi$ *и* $x_t \in M$ *для всех* $t \in [0, \alpha)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с последействием

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

и некоторое локально компактное подмножество M пространства $AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. На основании теоремы 1 можно сформулировать аналог теоремы Нагумо для систем с последействием. Теорема Нагумо была доказана в 1942 г. для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений и гладкого многообразия в качестве множества M. Этот результат можно найти, например, в [1]. Далее будем считать, что $\mathfrak{X} = AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{Y} = L_1([-r, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$. Следующее утверждение дает достаточные условия выживаемости системы (2) в множестве M.

Т е о р е м а 3. *Рассмотрим локально компактное подмножество* M *в* $\mathfrak{X}$. *Пусть для всякой точки* $\sigma \in \partial M$ *имеет место включение* $F(\sigma) \in T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M$, *где функция* $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *определена равенством* $F(\sigma) \doteq (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$. *Тогда для всякого* $\varphi \in M$ *существуют* $\alpha > 0$ *и решение* $t \to x(t)$ *уравнения* (2) *такие, что движение* $t \to x_t$ *в пространстве* $\mathfrak{X}$, *порожденное по правилу* $x_t(s) = x(t + s)$, $t \in [0, \alpha]$ $s \in [-r, 0]$ *удовлетворяет следующим условиям:* $x_0 = \varphi$ *и* $x_t \in M$ *для всех* $t \in [0, \alpha)$.

Найдем достаточные условия выживаемости для конкретного примера.

Пусть множество $M \doteq \{\sigma \in \mathfrak{X} : a(\sigma) = 0\}$, где $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$,

$$a(\sigma) \doteq \beta(\sigma(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s, \sigma(s)) ds,$$

а функции $\beta(t)$ и $\alpha(t,x)$ непрерывно дифференцируемы.

Множество касательных направлений к множеству M в точке σ состоит из элементов h пространства $\mathfrak{Y}$, удовлетворяющих следующему уравнению:

$$\beta'(t)|_{t=\sigma(0)}h(0) + \int_{-r}^{0} \alpha'_x(s,x)|_{x=\sigma(s)}h(s)ds = 0.$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть множество M абсолютно непрерывных решений $t \to \sigma(t)$ системы уравнений*

$$\beta(\sigma(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\sigma(s))ds = 0,$$

$$\beta'(t)|_{t=\sigma(0)}f(\sigma) + \int_{-r}^{0} \alpha'_x(s,x)|_{x=\sigma(s)}\dot\sigma(s)ds = 0$$

непусто, связно и замкнуто. Тогда для всякой $\varphi \in M$ существует момент времени $\tau > 0$ такой, что для решения $t \to x(t,\varphi)$ задачи $\dot x(t) = f(x_t)$, $x_0 = \varphi$ при всех $t \in [0,\tau]$ имеет место включение $x_t \in M$, где $t \to x_t$ — движение в пространстве абсолютно непрерывных функций, порожденное решением $x(t,\varphi)$.

В работе Е. Л. Тонкова [2] показано, что если

$$\beta'(t)|_{t=\sigma(0)}f(\sigma) + \int_{-r}^{0} \alpha'_x(s,x)|_{x=\sigma(s)}\dot\sigma(s)ds < 0$$

для всех $\sigma \in \partial M$, где $M \doteq \{\sigma \in \mathfrak{X} : a(\sigma) \leqslant 0\}$, то задача локального выживания в M разрешима. Следствие 1 уточняет это условие для движения по границе множества M.

* * *

1. Aubin J.-P. Viability theory. Boston: Birkhauser, 1991. 326 p.
2. Тонков Е.Л. Динамические задачи выживания // Вестн. Перм. гос. тех. ун-та. Функцион.-дифференц. уравнения (спец. вып.). 1997. Ѓ 4. С. 138–148.