УДК 517.935

© **О. В. Баранова**
baranov@ulm.uni.udm.ru

О РАВНОМЕРНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ключевые слова: дифференциальные системы со случайными параметрами, равномерная управляемость дифференциальных систем по вероятности.

Abstract. The linear differential system with stationary (in the restricted sense) random coefficients is considered. Sufficient conditions of uniform local controllability by probability systems with homogeneous Markov's coefficients are stated.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t,\omega)x + B(t,\omega)u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$. Системы такого вида возникают при исследовании систем, подвергающихся воздействию случайных возмущений.

На пространстве элементарных событий Ω выделим σ-алгебру $\mathfrak{A}$ случайных множеств. Пусть P — вероятностная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. При каждом фиксированном t величины A и B системы (1) есть случайные матрицы, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Всюду далее предполагается, что

$$P\{\omega : \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \|A(\tau,\omega)\|\, d\tau < \infty,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \|B(\tau,\omega)\|^2 d\tau < \infty\} = 1,$$

$$M\|B(0,\omega)\|^2 < \infty,$$

где $M\nu$ — математическое ожидание величины ν.

Предположим, что пара $(A,B) : \mathbb{R}^1 \times \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ образует измеримый, стационарный в узком смысле случайный процесс. Пусть g^τ — сохраняющее меру P преобразование пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$ на себя, т. е. для любого события $G \in \mathfrak{A}$ справедливо равенство $P(G \bigtriangleup g^\tau G) = 0$. Относительно управления $u : \mathbb{R}^1 \times \Omega \to U$ всюду далее будем предполагать, что это измеримый процесс и выполнено условие

$$0 \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}\, U).$$

О п р е д е л е н и е 1. Система (1) называется локально управляемой по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\sigma > 0$, $\delta > 0$, что

$$P\{\omega \in \Omega : O_\delta^n \subset D(\omega, \sigma)\} \geqslant 1 - \varepsilon,$$

где $D(\omega, \sigma)$ — множество управляемости системы (1) на отрезке $[0, \sigma]$ (при фиксированном ω).

О п р е д е л е н и е 2. Система (1) называется равномерно локально управляемой по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\sigma > 0$, $\delta > 0$, что для всех $\tau \geqslant 0$

$$P\{\omega \in \Omega : O_\delta^n \subset D(g^\tau\omega, \sigma)\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Вопросы о равномерной и равномерной локальной управляемости системы вида (1) в детерминированном случае исследовались Е. Л. Тонковым в [1] и [2]. В настоящей работе часть результатов этой теории распространяется на системы со стационарными случайными параметрами.

Л е м м а 1. *Пусть система* (1) *локально управляема по вероятности. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\sigma_0 > 0$ *такое, что для всех* $\sigma \geqslant \sigma_0$ *и всех* $l \in S^{n-1}$ *справедливо неравенство*

$$P\{\omega \in \Omega : \int_0^\sigma \|l' X(0,t,\omega) B(t,\omega)\|\, dt > 0\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Л е м м а 2. *Пусть система* (1) *локально управляема по вероятности. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\sigma > 0$ *такое, что для* $\{\alpha_i(\sigma, l, \tau, \omega)\}_{i=0}^{\infty}$ — *последовательности случайных величин, где*

$$\alpha_i(\sigma, l, \tau, \omega) = \int_0^{\sigma} \|l' X(i\tau, i\tau + t, \omega) B(i\tau + t, \omega)\| \, dt,$$

для любого $\omega \in \Omega$ *существует* $\alpha(\sigma, \omega) > 0$, *обладающее свойством: для любого* $l \in S^{n-1}$ *и всех* $\tau \in [0, \sigma]$ *справедливо неравенство*

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \{\alpha_i(\sigma, l, \tau, \omega)\}\right) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\xi = (A, B)$ — *стационарный в узком смысле случайный процесс, а система* (1) *локально управляема по вероятности. Тогда события* $G_1 = \{\omega \in \Omega :$ *система* ξ *локально управляема*$\}$ *и* $G_2 = \{\omega \in \Omega :$ *система* ξ *равномерно локально управляема*$\}$ *почти эквивалентны, то есть для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнено неравенство* $P(G_1 \triangle G_2) < \varepsilon$.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему (1), где матрицы A и B кусочно постоянны по переменной t при каждом фиксированном ω. Будем считать, что числовая прямая $\mathbb{R}^1$ разбивается на полуинтервалы $[t_k, t_{k+1})$ такие, что на каждом из них пара (A, B) сохраняет постоянное значение, а моменты переключений $\{t_k = t_k(\omega_1)\}$ случайны и имеют пуассоновское распределение с параметром a $(\omega_1 \in \Omega_1)$. На пространстве Ω_2 рассмотрим однородную марковскую цепь $\Phi(\omega_2) = (A(\omega_2), B(\omega_2))$ с конечным числом состояний, поведение которой определяется начальным распределением P_0 и матрицей $\mathbb{P}$ переходных вероятностей за один шаг. Будем предполагать, что матрица $\mathbb{P}$ — эргодическая. На прямом произведении $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ рассмотрим случайный процесс $\xi(t, \omega) = \gamma_{\nu(t,\omega_1)}(\omega_2)$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, $\gamma_k(\omega_2)$ — состояние марковской цепи Φ на k-м шаге, $\nu(t, \omega_1)$ — целочисленный случайный процесс, определенный равенством

$\nu(t,\omega_1) = \sup\{k : t_k(\omega_1) < t\}$, т.е. $\nu(t,\omega)$ — число точек последовательности $\{t_k\}$, расположенных левее t. Этот процесс имеет пуассоновское распределение с параметром a, то есть

$$P\{\omega_1 : \nu(t,\omega_1) = k\} = \frac{(at)^k}{k!}e^{-t}.$$

Заметим, что ξ — однородный эргодический марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Если коэффициенты системы (1) задаются с помощью координат процесса ξ, а среди состояний этого процесса существует глобально управляемое, то система (1) локально управляема по вероятности. Из теоремы следует, что система (1) равномерно локально управляема по вероятности.

В работе [3] получены аналогичные результаты для системы (1) с кусочно постоянными матрицами A и B, имеющим конечное число состояний, а моменты перехода из одного состояния в другое равномерно распределены.

Список литературы

1. Тонков Е.Л. К теории линейных управляемых систем: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Свердловск, 1984. 267 с.
2. Тонков Е.Л. О множестве управляемости линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, Ѓ 2. С. 269–278.
3. Баранова О.В. О равномерной глобальной управляемости линейной системы со стационарными случайными параметрами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, Ѓ 11. С. 1843–1850.