УДК 517.934

© **Л. А. Белоусов**
imi@uni.udm.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОГО КАТАЛИЗА[1]

Ключевые слова: математическое моделирование, химический катализ, существование решения, почти периодичность.

Abstract. The model of chemical catalysis which was presented by G. K. Borescov is considered. The condition of existens the solution are found.

В статье [1] приведена математическая модель, описывающая процессы в химическом реакторе (модель химического катализа). Эта модель сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно θ:

$$F(\theta,u) \doteq A(\theta) - S(\theta) - \gamma N(\theta) - V(u) = 0, \tag{1}$$

$$A(\theta) \doteq \partial\theta/\partial t - a^2\partial^2\theta/\partial\xi^2 + \alpha\theta,\ V(u)(t,\xi) \doteq u(t)\,\alpha\exp(-\alpha\xi), \tag{2}$$

$$S(\theta)(t,\xi) \doteq \alpha^2\int_0^{\xi}\exp(\alpha(s-\xi))\theta(t,s)\,ds, \tag{3}$$

$$N(\theta)(t,\xi) \doteq \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\xi}K(\theta(t,s))\exp(-\int_s^{\xi}\Phi(\theta(t,\omega))\,d\omega)\,ds. \tag{4}$$

Функции K и Φ определены равенствами

$$K(\theta) = g(\theta)/Z(\theta), \quad \Phi(\theta) = \beta - \beta/Z(\theta), \tag{5}$$

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00–1.0–5).

где

$$Z(\theta) = 1 + \mu(g(\theta) + g^{\eta}(\theta)/k_p)/\beta,$$

а функция $g(\cdot)$ — равенством

$$g(\theta) = \begin{cases} \exp((b\theta - 1)/(b^2\theta)) & \text{при} \quad \theta > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \theta \leqslant 0. \end{cases}$$

Мы будем предполагать, что выполнены неравенства

$$\begin{gathered} \eta > b \ln(k_p \beta/(\mu(\eta - 1))), \\ a > 0,\ b > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \mu > 0,\ k_p > 0 \end{gathered} \tag{6}$$

и граничные условия

$$\partial\theta(t,\xi)/\partial\xi|_{\xi=0} = 0, \quad \partial\theta(t,\xi)/\partial\xi|_{\xi=1} = 0\,. \tag{7}$$

Здесь $\theta(t,\xi)$ — безразмерная температура газа в момент времени t в точке ξ; a, α, γ, β, μ, k_p, η, b — безразмерные параметры модели.

Цель предлагаемого доклада состоит в том, чтобы показать, что модель Г. К. Борескова (1) – (7) допускает существование (в широком смысле) решений при заданном почти периодическом (п. п.) управлении u. Эта модель изучалась ранее в [2].

Пусть задано множество $U = [u_*, u^*]$ допустимых значений управлений. Здесь $0 \leqslant u_* < u^* < \infty$. Мы будем исследовать п. п. по t решения $\theta(t,\xi)$ уравнения (1), отвечающие множествам допустимых управлений, п. п. в смысле В. В. Степанова [3, глава V]:

$$\mathfrak{U}_S \doteq \{u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^1, U):\ u(\cdot) - \text{п. п.}\}\,.$$

Классы п. п. решений задачи (1) – (7) определены ниже.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} A(y) = S(y) + \gamma N(y) + V(u), \\ y|_{t=0} = 0, \quad y_\xi|_{\xi=0} = y_\xi|_{\xi=1} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть A, S, N и V — операторы, определенные формулами (2) – (6). Тогда при любом параметре $\gamma > 0$ и любом непрерывном управлении $u \in C(0,+\infty)$, стесненном ограничениями $\mathrm{u}_* \leqslant u(t) \leqslant \mathrm{u}^*$, существует классическое решение y задачи (8) такое, что $y \in C(\mathbb{R}^1_+; C^2[0,1])$, $y_t \in C(\mathbb{R}^1_+; C[0,1])$. Кроме того, если пара (θ, u) — удовлетворяет условиям (8), то она удовлетворяет и оценке

$$\sup_{t>0} \|y(t,\cdot)\|_{C^2[0,1]} + \sup_{t>0} \|y_t(t,\cdot)\|_{C[0,1]} \leqslant M_1(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*), \tag{9}$$

где $M_1(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*)$ — константа, зависящая лишь от u_* и u^*. Отметим, что доказательство этого утверждения подобно доказательству теоремы 1 [4].

Пусть E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, определенное равенством

$$E = \{l \in H^2(0,1) : l_\xi|_{\xi=0} = l_\xi|_{\xi=1} = 0\}.$$

Тогда, если билинейная форма $\langle x, y\rangle$, $(y \in E^*, x \in E)$ совпадает со скалярным произведением на $H^1(0,1)$ при $x, y \in H^1(0,1)$, то вложение $E \subset H^1(0,1) \subset E^*$ плотно и непрерывно. Пусть $\|x\|$ есть E-норма, $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение в $H^1(0,1)$. Пусть $G\colon E \to E^*$ — оператор, определенный равенством

$$G(\theta) = -a^2\Delta\theta + \alpha\theta - S(\theta) - \gamma N(\theta).$$

Тогда существует такая положительная константа γ°, что при любом $\gamma \in (0, \gamma^\circ)$ оператор G монотонен, полунепрерывен, ограничен и коэрцитивен [4]: существуют такие положительные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, что

$$\langle Gx, x\rangle \geqslant c_1\|x\|^2 - c_2, \quad \|Gx\|_* \leqslant c_3\|x\|^2 + c_4.$$

Первая из этих оценок означает коэрцитивность оператора G, вторая — его ограниченность.

Следуя [5], обозначим через $B(H^1)$ пространство всех измеримых по Борелю функций $f\colon \mathbb{R}^1 \to H^1$ с нормой

$$\|f\|_{B(H^1)} = \sup_t \Big(\int_0^1 \|f(t+s)\|^2_{H^1}\, ds \Big)^{1/2}, \quad t \in \mathbb{R}^1 .$$

Пусть M_* — модуль показателей Фурье функции $u(t)$, где $u \in \mathfrak{U}_S$, т.е. $u(t)$ есть п.п. (в смысле Степанова) функция $\mathbb{R}^1 \to U$. Через $\overset{\circ}{B}(H^1)$ обозначим подпространство пространства $B(H^1)$, для каждого из элементов которого семейство сдвигов $\{f(t+\tau)\}, \tau \in \mathbb{R}^1$ компактно в $B(H^1)$, а модуль показателей Фурье принадлежит M_*. Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а 1. [4]. *Пусть $\alpha, \beta, \mu, \eta, k_p, b$ — фиксированные параметры, согласованные с* (6)*. Тогда существует число $\gamma^\circ > 0$ такое, что при каждом $\gamma \in (0, \gamma^\circ)$ для любой функции $u \in \mathfrak{U}_S$, п. п. по Степанову, существует решение θ задачи* (1)–(7) *класса $\overset{\circ}{B}(H^1)$, т. е. θ — п. п. по Бору, при этом $\theta \in C(\mathbb{R}^1; C^1[0,1])$.*

Список литературы

1. Боресков Г. К., Матрос Ю. Ш., Киселев О. В., Бунимович Г. А. Осуществление гетерогенного каталитического процесса в нестационарном режиме // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. Ѓ 1. С. 160–163.
2. Матрос Ю. Ш., Валко П. Эффективность гетерогенного катализатора при периодическом изменении температуры исходной смеси // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. Ѓ 4. С. 912–914.
3. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.
4. Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Некоторые математические задачи, связанные с одной моделью химического катализа // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1997. Вып. 1(9). С. 3–62.
5. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.