Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 517.934

© **А. И. Благодатских**
imi@uni.udm.ru

ПРИМЕР ПОНТРЯГИНА СО МНОГИМИ УБЕГАЮЩИМИ

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, поимка, пример Понтрягина.

Abstract. Conditions of capture were derived in Pontriagin's problems.

Рассматривается обобщенный пример Л. С. Понтрягина [1] со многими участниками. При одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков пример рассматривался в [2]. В данной работе инерционные возможности совпадают, но убегающие имеют преимущество в динамике над преследователями. В предположении, что корни характеристического уравнения вещественны и неположительны, получены достаточные условия поимки заданного числа убегающих.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей P_1, $P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \ldots + a_l x_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1. \tag{1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + \ldots + a_l y_j = v_j, \quad \|v_j\| \leqslant \beta,\ \beta > 1. \tag{2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$. При $t = 0$ заданы начальные условия $x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i\alpha}^0$, $y_j^{(\alpha)}(0) = y_{j\alpha}^0$; $x_{i0}^0 \neq y_{j0}^0$. Здесь и всюду далее, если не оговорено специально,

$$i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ \alpha = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Обозначим $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$.

О п р е д е л е н и е 1. В игре Γ происходит поимка, если существует момент $T > 0$ такой, что для любой совокупности траекторий убегающих

$$\{y_j(t), y_j^{(\alpha)}(0) = y_{j\alpha}^0,\ t \in [0, \infty)\,\}$$

найдутся траектории преследователей

$$\{x_i(t), x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i\alpha}^0,\ t \in [0, T]\,\},$$

обладающие следующим свойством: существуют множества

$$N \subset I,\ M \subset J,\ |N| = q,\ |M| = q$$

такие, что каждый убегающий $\{E_j,\ j \in M\}$ ловится не позднее момента T некоторым преследователем $\{P_i,\ i \in N\}$, причем если преследователь P_i ловит убегающего E_j, то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение ѓпреследователь P_i ловит убегающего E_j Є означает, что существует момент $\tau_{ij} \in (0, T]$, что $x_i(\tau_{ij}) = y_j(\tau_{ij})$.

Считаем, что $n \geqslant q$.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Все корни уравнения

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \ldots + a_l = 0 \tag{3}$$

вещественны и неположительны.

Обозначим корни уравнения (3) через $\lambda_1 < \ldots < \lambda_s$, а их кратности — $k_1, \dots, k_s$ соответственно.

Введем функции φ_α — решения уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1 \omega^{(l-1)} + \ldots + a_l \omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \dots, \omega^{(\alpha)}(0) = 1, \dots, \omega^{(l-1)}(0) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t)x_{i0}^0 + \varphi_1(t)x_{i1}^0 + \ldots + \varphi_{l-1}(t)x_{il-1}^0,$$

$$\eta_j(t) = \varphi_0(t)y_{j0}^0 + \varphi_1(t)y_{j1}^0 + \ldots + \varphi_{l-1}(t)y_{jl-1}^0.$$

Так как

$$\varphi_\alpha(t) = e^{\lambda_1 t}P_{1\alpha}(t) + e^{\lambda_2 t}P_{2\alpha}(t) + \ldots + e^{\lambda_s t}P_{s\alpha}(t),$$

где $P_{r\alpha}(t)$ — многочлены такие, что $\deg P_{r\alpha}(t) \leqslant k_r - 1$, $r = 1, 2, \ldots, s$, то $\xi_i(t), \eta_j(t)$ представимы в виде

$$\xi_i(t) = e^{\lambda_1 t}Q_{1\alpha}(t) + e^{\lambda_2 t}Q_{2\alpha}(t) + \ldots + e^{\lambda_s t}Q_{s\alpha}(t),$$

$$\eta_j(t) = e^{\lambda_1 t}R_{1\alpha}(t) + e^{\lambda_2 t}R_{2\alpha}(t) + \ldots + e^{\lambda_s t}R_{s\alpha}(t),$$

где $Q_{r\alpha}(t), R_{r\alpha}(t)$ — многочлены, причем

$$\deg Q_{r\alpha}(t) \leqslant k_r - 1,\ \deg R_{r\alpha}(t) \leqslant k_r - 1,\ r = 1, 2, \ldots, s.$$

П р е д п о л о ж е н и е 2.

$$\deg P_{sl-1}(t) = \deg Q_{si}(t) = \deg R_{sj}(t) = k_s - 1 = \gamma.$$

Определим x_i^0, y_j^0 следующим образом:

$$x_i^0 = \lim_{t\to\infty} \frac{Q_{si}(t)}{t^\gamma}, \qquad y_j^0 = \lim_{t\to\infty} \frac{R_{sj}(t)}{t^\gamma}.$$

Можно считать, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Пусть L_j — луч с началом в точке y_j^0, ρ_j — непрерывная кривая с началом в точке y_j^0 такая, что для любого положительного числа C существует точка $z \in \rho_j$ для которой справедливо неравенство $\|z - y_j^0\| \geqslant C$.

Определим множества

$$A_{ij} = \operatorname{Int}\Big\{z : \|z - x_i^0\| \leqslant \frac{\|z - y_j^0\|}{\beta}\Big\}, \quad A_j(N) = \bigcup_{i\in N} A_{ij}.$$

П р е д п о л о ж е н и е 3. Если для $j \in N$ существует кривая ρ_j такая, что $A_j(N) \cap \rho_j = \varnothing$, то существует луч L_j такой, что $A_j(N) \cap L_j = \varnothing$.

Далее считаем предположения 1, 2 и 3 выполненными.

У с л о в и е 1. Для любого луча L_1 справедливо

$$A_1(I) \cap L_1 \neq \varnothing.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $m = q = 1$ и выполнено условие 1. Тогда в игре Γ происходит поимка.*

У с л о в и е 2. При всех $p \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ справедливо следующее: для любого множества $N \subset I, |N| = n - p$ существует множество $M \subset J, |M| = q - p$ такое, что для любых $j \in M$ и L_j справедливо $A_j(N) \cap L_j \neq \varnothing$.

Т е о р е м а 2. *Пусть имеет место условие 2. Тогда в игре Γ происходит поимка q убегающих.*

П р и м е р 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ дифференциальную игру 13 лиц: преследователей $P_1, \dots, P_{12}$ и убегающего E.

Системы $(1), (2)$ имеют вид

$$\dddot{x}_i + 3\ddot{x}_i + 2\dot{x}_i = u_i, \ \|u_i\| \leqslant 1,$$
$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = v, \ \|v\| \leqslant \beta.$$

Пусть

$$x_i^0 = x_{i0}^0 + 3x_{i1}^0/2 + x_{i2}^0/2, \quad y^0 = y_{10}^0 + 3y_{11}^0/2 + y_{12}^0/2.$$

Предположим, что $x_1^0, \dots, x_{12}^0$ являются вершинами правильного двенадцатиугольника, а y^0 совпадает с его центром. Тогда, если $\beta \in (1, 2\sqrt{2+\sqrt{3}})$, то в данной дифференциальной игре происходит поимка.

* * *

1. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.
2. Петров Н. Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. 192 с.