УДК 517.917

© **Т. С. Быкова, Е. Л. Тонков**
imi@uni.udm.ru, elt@udman.ru

О ЛЯПУНОВСКОЙ ПРИВОДИМОСТИ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Ключевые слова: линейные системы с последействием, показатели Ляпунова, ляпуновская приводимость, асимптотическая эквивалентность, теория Флоке.

Abstract. The conditions reducability of linear system restriction with time lag on finite-dimansional subspaces of initial functions by means of Lyapunov reduction to the system of ordinary differentional equations with bounded and continuous on semiaxis matrix of coefficients are found.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, $|x| = \sqrt{x^* x}$ — норма в $\mathbb{R}^n$ (звезда означает операцию транспонирования). Пространство $\mathbb{M}(n, m, \mathbb{R})$ линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с пространством вещественных $(n \times m)$-матриц (если $n = m$, то пишем $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$) с евклидовой нормой $|A| \doteq \max\{|Ax| : |x| = 1\}$.

Для краткости записи пространство $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций с sup-нормой будем обозначать $\mathfrak{S}$. Рассмотрим систему уравнений с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t, s) x(t + s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \tag{1}$$

которую далее будем отождествлять с функцией A, ее задающей. Здесь $\dot{x}(t) \doteq \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-1}\big(x(t+\varepsilon) - x(t)\big)$ — правая производная функции $x(t)$, интеграл Стилтьеса рассматривается по переменной s при каждом фиксированном t. Будем предполагать,

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00-1.0-5).

что $r > 0$ и функция $A: \mathbb{R} \times [-r,0] \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ удовлетворяет естественным условиям: функция $(t,s) \to A(t,s)$ ограничена в полосе $\mathbb{R} \times [-r,0]$, функция $t \to A(t,0)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $A(t,-r) \equiv 0$, вариация $\mathsf{Var}_{s\in[-r,0]} A(t,s)$ функции $s \to A(t,s)$ ограничена на $[-r,0]$ равномерно относительно t, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|\tau| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\int_{-r}^{0} |A(t+\tau,s) - A(t,s)|\, d\, s \leqslant \varepsilon.$$

Эти условия с запасом обеспечивают (см., например, [1]) существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши.

Для произвольной непрерывной функции $t \to x(t)$, определенной на некотором интервале $J \subset \mathbb{R}$, и любой точки t такой, что $[t-r,t] \subset J$, запись $x_t(\cdot)$ (или просто x_t) означает функцию $s \to x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменного $s \in [-r,0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $t \to x_t \doteq x_t(\cdot,u)$ — решение системы A, удовлетворяющее начальному условию $x_0(\cdot,u) = u(\cdot) \in \mathfrak{S}$. Тогда для всех $(t,s) \in \Delta \doteq \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ имеет место равенство $x_t = X(t,s)x_s$, где $X(t,s) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ — оператор Коши системы A. Напомним, что [1] оператор Коши линеен; при $t > s \geqslant r$ компактен в $\mathfrak{S}$ и обладает свойством полугруппы: $X(t,s) = X(t,\tau)X(\tau,s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t$.

Для каждого $u \in \mathfrak{S}$ определим показатель Ляпунова

$$\lambda(u) \doteq \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \|x_t(\cdot,u)\|, \quad \lambda(0) \doteq -\infty.$$

Легко проверить, что: 1) если $c \neq 0$, то $\lambda(cu) = \lambda(u)$; 2) имеет место неравенство $\lambda(u+v) \leqslant \max\{\lambda(u),\lambda(v)\}$, причем если $\lambda(u) > \lambda(v)$, то $\lambda(u+v) = \lambda(u)$. Из 1) и 2) следует, что множество $\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \lambda(u) = -\infty\}$ образует линейное подпространство в $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}^+$ — прямое дополнение пространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, т.е. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$. Тогда для всех ненулевых $u \in \mathfrak{S}^+$ выполнено неравенство $\lambda(u) > -\infty$.

Зафиксируем в $\mathfrak{S}^+$ линейное подпространство $\mathbb{S}_0^p$ размерности p. Для каждого $t \geqslant 0$ подпространство $\mathbb{S}_t^p \doteq X(t,0)\mathbb{S}_0^p$ также имеет размерность p, причем если $u^1, \dots, u^p$ — произвольный фиксированный базис в $\mathbb{S}_0^p$, то функции $x_t^i = X(t,0)u^i$ образуют базис в $\mathbb{S}_t^p$. Будем рассматривать сужение системы A на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Это означает, что всякое решение системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ есть функция $t \to x_t(\cdot, u)$, непрерывно продолжающая начальную функцию $u \in \mathbb{S}_0^p$ и принимающая значения в $\mathbb{S}_t^p$. Наряду с системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{R}^p$$

(отождествляемую далее с матрицей B, ее задающей) с непрерывной на $\mathbb{R}_+$ функцией $t \to B(t) \in \mathbb{M}(p, \mathbb{R})$. По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$ введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \dots, y^p(t)$, образующим столбцы матрицы Коши $Y(t,0)$ системы B. Следовательно, запись $y(t) \in \mathbb{R}_t^p$ будет означать, что $y(t)$ — значение решения системы B в точке t и поэтому $y(t) = Y(t,0)y^0$ при некотором $y^0 \in \mathbb{R}_0^p = \mathbb{R}^p$ (напомним, что $\mathbb{R}_0^p$ — стандартное евклидово пространство и поэтому в $\mathbb{R}_0^p$ фиксирован ортонормированный базис $e^1 = \mathrm{col}(1, 0, \dots, 0), \dots, e^n = \mathrm{col}(0, \dots, 0, 1)$).

Пусть $\mathbf{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{S} \to \mathbb{R}^p}$.

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $t \to L(t) \in \mathbf{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть **ляпуновским преобразованием** систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B, если при каждом $t \geqslant 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$ и выполнено неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} \bigl(\|L(t)\|_{\mathfrak{S} \to \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \to \mathfrak{S}} \bigr) < \infty.$$

Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ **приводима** ляпуновским преобразованием L к системе B, или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B **асимптотически эквивалентны**.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathbb{S}_0^p \subset \mathfrak{S}^+$. *Тогда:*

а) *найдутся система* B *с непрерывной на* $\mathbb{R}_+ \doteq [0,\infty)$ *матрицей* $B(t)$ *и ляпуновское преобразование* L, *приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B;

б) *в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически эквивалентных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система с непрерывной на* $\mathbb{R}_+$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$;

в) *если в дополнение к сказанному всякое решение системы* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *ѓпродолжаемо влевоЄ, т. е. найдется константа* $\alpha > 0$, *что для каждого* $u \in \mathbb{S}_0^p$, *любого* $\tau \in [-r, 0]$ *и всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство* $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\| \leqslant \alpha \|x_t(\cdot, u)\|$, *то в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически эквивалентных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система* B *с ограниченной на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *матрицей* $B(t)$ (*и, следовательно, с ограниченной на* $\mathbb{R}_+$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$);

г) *если* $A(t+T, s) = A(t, s)$ *для всех* $(t, s) \in \mathbb{R} \times [-r, 0]$, *то найдутся система* B *с вещественнозначной непрерывной* T*-периодической матрицей* $B(t)$ *и* T*-периодическое по* t *ляпуновское преобразование* L, *приводящее* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к* B.

З а м е ч а н и е 1. Теорема о ляпуновской приводимости системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ к системе B при более жестких предположениях доказана в [2]. В частности, в [2] дополнительно предполагалось, что множество показателей Ляпунова системы A не более чем счетно, каждый конечный показатель имеет конечную кратность и пространство $\mathbb{S}_0^p$ равномерно регулярно.

Полное доказательство этой теоремы планируется опубликовать в журнале ѓДифференциальные уравненияЄ.

* * *

1. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
2. Тонков Е. Л. Показатели Ляпунова и ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 2001. Ѓ 3. С. 13–30.