

УДК 518:517.948

© В.М. Вержбицкий

pmi@istu.udm.ru

## О ВЫДЕЛЕНИИ ОБЩЕЙ ЧАСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

**Ключевые слова:** нелинейные операторы, банаховы пространства, итерационные методы, невязки, поправки, сходимость.

**Abstract.** Two theorems are presented, which allow to omit the end of proofs of convergence theorems about fast-convergent iterative methods of solving of nonlinear operator equations in Banach spaces.

Пусть к задаче нахождения нулей гладкого нелинейного оператора  $F$ , определенного в банаховом пространстве  $X$  со значениями в нормированном пространстве  $Y$ , применяется некоторый одиношаговый итерационный метод

$$x_{k+1} = Q_k(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots . \quad (1)$$

Многие утверждения о сходимости методов типа (1) с порядком  $\mu \geq 1$  к нулю  $x^*$  оператора  $F$  имеют следующую структуру:  
если на множестве  $M \subset X$  оператор  $F$  удовлетворяет определенным требованиям и выполняются такие-то и такие-то условия, то:

- 1)  $\exists x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ и } \exists r > 0 : x^* \in S(x_0, r) \subseteq M;$
- 2)  $F(x^*) = 0;$
- 3)  $\exists C > 0, \mu \geq 1, \nu \in (0, 1) : \|x^* - x_k\| \leq C \cdot \nu^{\mu^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Доказательства подобных утверждений, как правило, сводятся к оцениванию величины  $\|x_{k+m} - x_k\|$ , откуда при  $k \rightarrow \infty$  и фиксированном  $m$  следует фундаментальность порождаемой (1)

последовательности  $(x_k)$ ; при  $k = 0$ ,  $m \rightarrow \infty$  находится радиус  $r$  шара  $S(x_0, r)$  сходимости, а при  $k$  — фиксированном,  $m \rightarrow \infty$  получается априорная оценка погрешности, позволяющая судить о быстроте сходимости и о порядке метода. Проведение этой общей части доказательств можно не связывать с конкретным оператором итерирования  $Q_k$ , а достаточно потребовать наличие определенных соотношений между поправками  $x_{k+1} - x_k$  и невязками  $F(x_k)$  и знание закона убывания норм последних.

**Т е о р е м а 1.** I. Пусть непрерывный оператор  $F : M \rightarrow Y$  и последовательность элементов  $x_k$  множества  $M \subseteq X$  таковы, что при всех  $k \in \mathbb{N}_0$  выполняются условия

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \lambda p_k, \quad \|F(x_k)\| \leq p_k,$$

где числа  $p_k$  удовлетворяют рекуррентным равенствам

$$p_{k+1} = G_0 p_k^\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а  $\lambda > 0$ ,  $G_0 > 0$ ,  $p_0 > 0$  и  $\mu > 1$  — некоторые вещественные параметры.

II. Тогда, если  $\nu \doteq G_0 p_0^{\mu-1} < 1$  и замкнутый шар  $S(x_0, r)$ , где  $r = \lambda p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{\frac{\mu^i - 1}{\mu - 1}}$ , содержится в  $M$ , то все члены последовательности  $(x_k)$  принадлежат  $S$ , последовательность  $(x_k)$  имеет предел  $x^* \in S$  такой, что  $F(x^*) = 0$ ; быстрота сходимости  $(x_k)$  к  $x^*$  характеризуется неравенством

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{\lambda p_0}{1 - \nu^{\mu^k}} \cdot \nu^{\frac{\mu^k - 1}{\mu - 1}}.$$

В применении к конкретным методам вида (1) иногда бывает предпочтительнее другая формулировка требований к поправкам и к невязкам.

**Т е о р е м а 2.** Пусть существуют такие последовательности положительных чисел  $H_k$  и  $G_k$ , удовлетворяющих условиям  $H_k \leq H_0$ ,  $G_k \leq G_0$ , и такое число  $\mu > 1$ , что в предпо-

ложении, что  $x_k \in M$ , при всех  $k \in \mathbb{N}_0$  выполняются неравенства

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq H_k \cdot \|F(x_k)\|, \quad \|F(x_{k+1})\| \leq G_k \cdot \|F(x_k)\|^\mu.$$

Тогда справедлива часть II теоремы 1 с  $p_0 \geq \|F(x_0)\|$ ,  $\lambda = H_0$ .

При установлении сходимости итерационной последовательности  $(x_k)$  с порядком  $\mu = 1$  также можно воспользоваться теоремами 1, 2; при этом следует считать

$$\nu = G_0, \quad r = \frac{\lambda p_0}{1 - \nu}, \quad \|x^* - x_k\| \leq \frac{\lambda p_0}{1 - \nu^k} \cdot \nu^k.$$

Учитывая последнее при изучении сходимости, например, модифицированного метода Ньютона–Канторовича [1]

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_0)]^{-1} F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

с помощью теоремы 2 приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.** Пусть для  $F : (M \subseteq X) \rightarrow Y$  выполнены требования:

1)  $\exists F'(x) : (\exists L > 0 : \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \leq L \|x - \tilde{x}\| \quad \forall \tilde{x} \in M)$   
 $\forall x \in M$ ;

2)  $\exists [F'(x_0)]^{-1}$ ,  $\exists C > 0 : \| [F'(x_0)]^{-1} \| \leq C$ .

Тогда, если при  $p_0 \geq \|F(x_0)\|$  справедливо неравенство  $t \doteq LC^2 p_0 \leq 0.125$  и замкнутый шар  $S(x_0, r = \frac{2Cp_0}{1 \pm \sqrt{1 - 8t}})$  содержит в  $M$ , то начатый с  $x_0$  итерационный процесс (2) сходится в  $S$  к решению  $x^*$  уравнения  $F(x) = 0$  с оценкой погрешности

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{Cp_0}{1 - \nu^k} \nu^k,$$

где  $\nu = 0.5 \mp \sqrt{0.25 - 2t}$  и знаки в выражениях  $\nu$  и  $r$  берутся соответственно только верхние или только нижние.

Аналогично с подключением теорем 1, 2 получаются условия квадратичной сходимости основного метода Ньютона–Канторовича [1]

$$x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $A_k = [F'(x_k)]^{-1}$ , а также его аппроксимационного аналога [2], представляющего собой поочередное выполнение шага вычислений по формуле (3) и шага вычислений по формуле

$$A_{k+1} = A_k(2I - F'(x_{k+1})A_k), \quad (4)$$

начинаемого с  $A_0 \approx [F'(x_0)]^{-1}$ . Без особых проблем устанавливается кубическая сходимость метода касательных парабол и ряда других подобных методов, предполагающих использование или точных обратных к производным Фреше операторов  $[F'(x_k)]^{-1}$  или приближений к ним по формулам типа рекуррентного равенства (4).

Доказательства приведенных здесь результатов можно найти в статье [3], конечномерный случай рассмотрен в книгах [4, 5].

### Список литературы

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
2. Ульм С. Ю. Об итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора // Изв. АН ЭССР. Физ., матем. 1967. 16, Г 4. С. 403–411.
3. Вержбицкий В. М. О сходимости последовательностей элементов банаховых пространств к нулям нелинейных операторов // Вестн. Перм. гос. тех. ун-та, 2002 (в печати).
4. Вержбицкий В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). М.: Высш. шк., 2000. 266 с.
5. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 848 с.