УДК 517.5

© **В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов**
derr@uni.udm.ru

О КВАЗИРАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ[1]

Ключевые слова: равномерная и квазиравномерная сходимости.

Abstract. Two different definitions of quasiuniform convergence are compared. It is estabblisched that for the regulated functions both definitions are equivalent.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Как известно, равномерная сходимость $f_n(\cdot)$ является достаточным, но в общем случае не необходимым условием непрерывности предельной функции $f(\cdot)$. В 1883 году С. Арцела нашел необходимое и достаточное условие непрерывности $f(\cdot)$, которое позднее было названо квазиравномерной сходимостью. Э. Борель и П. С. Александров, каждый по-своему, модифицировали это определение.

Определение 1 (П. С. Александров). Скажем, что $f_n(\cdot)$ сходится к $f(\cdot)$ на $[a, b]$ квазиравномерно, если: 1) $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, и 2) для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $N \in \mathbb{N}$ отрезок $[a, b]$ может быть покрыт конечным числом интервалов $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_p, \beta_p)$, и им в соответствие могут быть поставлены номера $n_1, n_2, \ldots, n_p$, $n_k > N$ $(k = 1, \ldots, p)$ так, что для всех $x \in [a, b]$, содержащихся в (α_k, β_k) $(k = 1, \ldots, p)$, неравенство $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется одновременно.

Определение 2 (Э. Борель). Скажем, что $f_n(\cdot)$ сходится к $f(\cdot)$ на $[a, b]$ квазиравномерно, если: 1) $f_n(x) \to f(x)$

[1]Полностью материал доклада публикуется в [1].

для всех $x \in [a, b]$, и 2) для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $N \in \mathbb{N}$ можно выбрать номера $n_k > N \quad (k = 1, \ldots, p)$ так, чтобы для всех $x \in [a, b]$ выполнялось неравенство $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость влечет квазиравномерную сходимость в смысле обоих определений; для монотонных последовательностей верно и обратное: квазиравномерная сходимость в смысле любого из определений 1 или 2 влечет равномерную сходимость. В общем случае квазиравномерная сходимость в смысле первого определения влечет квазиравномерную сходимость в смысле второго определения. В [2] приведен пример, показывающий, что определение 2 шире определения 1. Теорема Арцела устанавливает эквивалентность обоих определений для последовательностей непрерывных функций. Модифицировав доказательство теоремы Арцела, можно показать эквивалентность этих определений для функций, непрерывных в каждой точке слева (справа).

Пусть DC означает множество функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, имеющих в каждой точке отрезка $[a, b]$ конечные односторонние пределы.

Т е о р е м а 1. *В классе* DC *определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

В [1] показано, что квазиравномерная сходимость последовательности функций из DC, являясь достаточным условием принадлежности предельной функции к DC, не является необходимым условием такой принадлежности.

* * *

1. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. Замечания о квазиравномерной сходимости // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 2002. Ґ 1. С. 96–101.
2. Кинзебулатов Д. М. Контрпример к понятию квазиравномерной сходимости // Тезисы 5-й Рос. универ.-акад. науч.-практ. конф. Ч. 10. Ижевск: Изд-во УдГУ, 2001. С. 34–36.