УДК 517.929

© **Ю. Ф. Долгий**
Yurii.Dolgii@usu.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с запаздываниями, оператор монодромии, конечномерные аппроксимации.

Abstract. Asymptotic behavior of the finite-dimensional approximations for the monodromy operator is investigated.

Для линейного периодического функционально-дифференциального уравнения с вполне непрерывным оператором монодромии условия асимптотической устойчивости можно сформулировать в терминах спектра этого оператора. Собственные числа оператора определяются корнями характеристического уравнения. В работе [1] для гильбертова пространства состояний предложены методы построения характеристического уравнения. Искомое характеристическое уравнение находится как предел характеристических уравнений для конечномерных аппроксимаций оператора монодромии. Существуют классы функционально-дифференциальных уравнений, порождаемые дискретными мерами Стилтьеса, операторы монодромии для которых не допускают непрерывные продолжения с пространства непрерывных функций на гильбертово пространство состояний [1]. В этом случае при построении характеристического уравнения оператора монодромии требуется находить конечномерные аппроксимации

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования Российской Федерации ҐЕ 00-10-91.

этого оператора в пространстве непрерывных функций. В работе исследуются функционально-дифференциальные уравнения с дискретными мерами Стилтьеса, описываемые дифференциальными уравнениями с переменными запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)x(t-\tau_k(t)). \tag{1}$$

Здесь $A_k\,(k = \overline{0,m})$ — ω-периодические матричные функции размерности $n \times n$, интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0,\omega]$; $\tau_k\,(k = \overline{1,m})$ — ω-периодические функции, измеримые по Лебегу на отрезке $[0,\omega]$, для которых выполняются условия: $0 < \inf\limits_{t\in[0,\omega]} \tau_k(t) \leqslant \sup\limits_{t\in[0,\omega]} \tau_k(t) \leqslant \omega$, $k = \overline{1,m}$.

Для начального момента $t_0 \in \mathbb{R}$ введем множества

$$E_k^0 = \{\vartheta : \exists t\,(t > t_0)\ \vartheta = h_k(t) \leqslant t_0\},$$
$$E_k^1 = \left\{t : h_k(t) \in \overline{E^0}, t > t_0\right\},$$

где $h_k(t) = t - \tau_k(t)$, $k = \overline{1,m}$. Обозначим $E^0 = \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k^0$, $E^1 = \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k^1$. Решением начальной задачи Коши с начальным моментом $t_0 \in \mathbb{R}$ и начальной функцией $\varphi \in C(\overline{E^0} \bigcup \{t_0\}, \mathbb{R}^n)$ для дифференциального уравнения с запаздываниями (1) назовем функцию $x : \overline{E^0} \bigcup [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ такую, что $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in \overline{E^0} \bigcup \{t_0\}$, на любом компакте из $(t_0, +\infty)$ функция x абсолютно непрерывна и удовлетворяет почти всюду на этом компакте дифференциальному уравнению с запаздываниями (1). В приведенной формулировке начальной задачи Коши начальная функция φ определена на компакте $\overline{E^0} \bigcup \{t_0\}$, а не на отрезке, его содержащем. Это отступление от традиционной формулировки начальной задачи Коши позволяет отождествлять решения дифференциального уравнения (1), значения начальных функций которых совпадают на множестве $\overline{E^0} \bigcup \{t_0\}$. Сделанные выше предположения обеспечивают для дифференциальных уравнений (1) существование и единственность решения начальной задачи Коши.

Оператор монодромии $U : C(\overline{E^0} \bigcup \{t_0\}, \mathbb{R}^n) \to C(\overline{E^0} \bigcup \{t_0\}, \mathbb{R}^n)$ ограничен, вполне непрерывен и допускает аналитическое представление

$$(U\varphi)(\vartheta) = V(\omega+\vartheta, t_0)\varphi(t_0) + \\ +\sum_{k=1}^{m} \int_{\bar{E}^1_k} V(\omega+\vartheta, s) A_k(s) \varphi(h_k(s))\, ds, \tag{2}$$

где $\vartheta \in \overline{E^0} \bigcup \{t_0\}$. В формуле (2) V обозначает матрицу-функцию Коши [3] для дифференциальных уравнений с запаздываниями (1).

Будем предполагать, что множество $\overline{E^0}$ состоит из конечного числа отрезков. Обозначим через U^i_N конечномерный оператор, который получается из оператора монодромии (2) с помощью замены на каждом отрезке множества $\overline{E^0}$ элементов матричной функции $V(\omega+\cdot, s)$ алгебраическими полиномами наилучшего приближения по аргументу ϑ. Полином наилучшего приближения наименее уклоняется на отрезке от заданной функции среди всех полиномов, степени которых не превосходят натурального числа N. В работе [2] получены асимптотические оценки точности аппроксимации оператора монодромии конечномерными операторами.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $A_k\,(k = \overline{0,m})$ — ω*-периодические матричные функции, интегрируемые по Лебегу на отрезке* $[0,\omega]$; $\tau_k\,(k=\overline{1,m})$ — ω*-периодические функции, измеримые по Лебегу на отрезке* $[0,\omega]$, *для которых выполняются условия:* $0 < \inf\limits_{t\in[0,\omega]} \tau_k(t) \leqslant \sup\limits_{t\in[0,\omega]} \tau_k(t) \leqslant \omega$, $k=\overline{1,m}$, $\inf\limits_{\vartheta\in\overline{E^0}} (\omega+\vartheta) \geqslant \sup\limits_{s\in\overline{E^1}} s$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\left\|U - U^i_N\right\|_C = O(\sup_{\vartheta\in\overline{E^0}} \int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+\delta} \sum_{k=0}^{m} |A_k(\tau)|\, d\tau), \quad \delta = \mu(\overline{E^0})/N.$$

В основе метода получения асимптотической оценки точности аппроксимации оператора монодромии лежит теорема Джексона для алгебраических полиномов [4]. Учитывая сглаживающие свойства решений систем дифференциальных уравнений с запаздываниями, можно усилить полученный в теореме 1 результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть на отрезке* $[0,\omega]$ *периодические функции* τ_k $(k=\overline{1,m})$ *и элементы периодических матричных функций* A_k $(k=\overline{0,m})$ *принадлежат пространству* $W_1^r[0,\omega]$, $r\geq 1$, *а для функций* τ_k $(k=\overline{1,m})$ *выполняются условия:* $0<\inf\limits_{t\in[0,\omega]}\tau_k(t)\leqslant \sup\limits_{t\in[0,\omega]}\tau_k(t)\leqslant\omega$ $(k=\overline{1,m})$, $\inf\limits_{\vartheta\in\overline{E^0}}(h_{k_1}\cdots h_{k_r})(\omega+\vartheta)\geqslant \sup\limits_{s\in\overline{E^1}} s(k_1,\ldots,k_r=\overline{1,m})$. *Тогда имеет место асимптотическая формула* $\left\|U-U_N^i\right\|_C=O(N^{-r-1})$.

В теореме 2 обозначение $(h_{k_1}\cdots h_{k_r})$ используется для суперпозиции функций $h_{k_1},\ldots,h_{k_r}$. Размерность конечномерного оператора U_N^i определяется выбором числа N.

Список литературы

1. Долгий Ю. Ф. Характеристическое уравнение в задаче устойчивости периодических систем с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. Ґ 10 (Математика и механика, вып. 1). С. 34–43.
2. Долгий Ю. Ф. Конечномерные аппроксимации оператора монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с запаздываниями // Вестн. Перм. гос. тех. ун-та. Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь (в печати).
3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
4. Бердышев В. И., Субботин Ю. Н. Численные методы приближения функций. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1979. 120 с.