Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. №2(25)

УДК 517.929

© **А. В. Ким, А. Б. Ложников**
avkim@imm.uran.ru, ABLozhnikov@imm.uran.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ: ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ[1]

Ключевые слова: системы с последействием, моделирование, устойчивость.

Abstract. The report presents some new results on mathematical modeling and simulation of systems with delays. Constructive theorem on asymptotic stability of linear systems with delays is presented.

Линейные функционально-дифференциальные уравнения

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + A_\tau\,x(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} G(s)\,x(t+s)\,ds \tag{1}$$

широко применяются при математическом описании различных процессов и систем с последействием. Здесь A, A_τ — постоянные матрицы размерности $n \times n$, $G(s)$ — матрица размерности $n \times n$ с кусочно непрерывными элементами на $[-\tau, 0]$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\tau > 0$.

При исследовании устойчивости таких уравнений возникают существенные трудности, связанные с бесконечномерностью фазового пространства таких систем. Для линейных систем с запаздыванием известен ряд критериев асимптотической устойчивости в терминах собственных чисел характеристического уравнения, функционалов Ляпунова–Красовского, фундаментальной

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 01-01-00576) и Министерством образования РФ (грант № E 00-1.0-88).

матрицы системы (см., например, [1–6]). Однако следует отметить, что практическое применение этих критериев затруднительно ввиду сложности их представления в форме конструктивных алгоритмических процедур. Поэтому разработка конструктивных критериев исследования асимптотической устойчивости таких систем представляется важной задачей как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

В настоящей работе получен конструктивный критерий асимптотической устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений (1) в терминах фундаментальной матрицы и параметров системы. Фундаментальной матрицей системы (1) называется $n \times n$ матрица $F[t]$, являющаяся решением при $t > 0$ матричного функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{F}[t] = A\,F[t] + A_\tau\,F[t-\tau] + \int_{-\tau}^{0} G(s)\,F[t+s]\,ds$$

с начальными условиями $F[0] = I$ (I — единичная матрица), $F[t] = 0$ при $t < 0$.

Т е о р е м а 1. *Система* (1) *асимптотически устойчива в том и только том случае, когда существует константа* $T > 2\tau$ *такая, что*

$$\max_{-2\tau \leqslant s \leqslant 0} \|F[T+s]\|_{n\times n} \times \\ \times \Bigl(1 + \tau\,\|A_\tau\|_{n\times n} + \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{s} \|G(\nu)\|_{n\times n} d\nu\, ds\Bigr) < 1. \qquad (2)$$

Здесь $\|x\|$ — норма вектора $x \in \mathbf{R}^n$; $\|B\|_{n\times n} = \max\limits_{\|x\|=1} \dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$ — норма матрицы B размерности $n \times n$.

З а м е ч а н и е 1. Согласно теореме 1 для асимптотической устойчивости системы (1) достаточно выполнения условия (2) для некоторого конечного момента времени $T > 2\tau$. При этом для конкретной системы (1) входящие в неравенство (2) нормы матриц могут быть вычислены априори, а фундаментальная матрица $F[t]$ может быть найдена численно на конечном интервале $[T-2\tau, T]$ (соответствующие алгоритмы и программное обеспечение реализованы в пакете прикладных программ *Time-delay System Toolbox* [7]).

Таким образом, теорема 1 позволяет реализовать конструктивную процедуру проверки асимптотической устойчивости системы (1) на основе пошаговой проверки неравенства (2) на последовательности интервалов конечной длины.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}, \ A_\tau = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}, \ G(s) = \begin{pmatrix} -0,3 & 0 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$$

и запаздыванием $\tau = 0,5$. При $T = 15$

$$\max_{-2\tau\leqslant s\leqslant 0} \|F[T+s]\|_{n\times n} \times$$
$$\times \big(1 + \tau\, \|A_\tau\|_{n\times n} + \int\limits_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{s} \|G(\nu)\|_{n\times n} d\nu\, ds\big) = 0,081.$$

Таким образом, в силу теоремы 1 тривиальное решение системы (1) с выбранными матрицами асимптотически устойчиво.

П р и м е р 2. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -1,89 & 0 & 0,2 \\ 0 & -0,9 & 0 \\ 0,1 & 0 & -1,1 \end{pmatrix}, \ A_\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -0,1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} -0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & -1 \end{pmatrix}$$

и запаздыванием $\tau = 1$. При $T = 8$

$$\max_{-2\tau \leqslant s \leqslant 0} \|F[T+s]\|_{n\times n} \times$$
$$\times \Big(1 + \tau \, \|A_\tau\|_{n\times n} + \int\limits_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{s} \|G(\nu)\|_{n\times n} d\nu \, ds\Big) = 0{,}48946698796.$$

Следовательно, тривиальное решение системы (1) с выбранными матрицами асимптотически устойчиво, так как выполнены условия теоремы 1.

Результаты теоремы 1 могут быть распространены на линейные системы функционально-дифференциальных уравнений более общего вида.

Другие конструктивные алгоритмы анализа и компьютерного моделирования систем с последействием представлены на сайте `http://fde.imm.uran.ru`.

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 200 с.
2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М: Физматгиз, 1959. 212 с.
3. Chukwu E. N. Stability and time-optimal control of hereditary systems. Boston: Academic Press, 1992. 509 p.
4. Hale J. K., Lunel S. M. V. Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993. 448 p.
5. Kim A. V. Functional differential equations. Application of i–smooth calculus. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 167 p.
6. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999. 664 p.
7. Kim A. V., Kwon W. H., Pimenov V. G., Han S. H., Lozhnikov A. B., Onegova O. V. Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). 2001. 131 p.