Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 517.929

© **В. П. Максимов, А. Н. Румянцев**
vpm@prognoz.ru, ran@incon.ru

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ[1]

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, доказательный вычислительный эксперимент, краевые задачи, задачи программного управления.

Abstract. The general control problem for the linear functional differential system is considered in context of the theory of reliable computing experiment.

В настоящее время теоретическое обоснование и технология доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ) разработаны применительно к исследованию на разрешимость линейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), к исследованию управляемости линейных систем ФДУ, устойчивости и асимптотических свойств систем с запаздыванием и периодическими параметрами [1, 2]. Доклад посвящен вопросам теоретического обоснования ДВЭ применительно к исследованию одного обобщения классической задачи программного управления линейной системой. Полный текст доклада публикуется в специальном выпуске Вестника Пермского государственного технического университета, 2002. Детальное изложение теории ДВЭ для ФДУ дано в [2, 3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы ґУниверситеты России — фундаментальные исследованияЄ (УР.03.01.023).

Пусть

$$(\mathcal{L}x)(t) \;=\; (Bu)(t) \;+\; v(t),\;\; t \in [0,T] \tag{1}$$

— функционально-дифференциальная система управления с линейными ограниченными операторами $\mathcal{L} : D \to L$, $B : L_2 \to L$. Здесь L — пространство суммируемых функций $z : [0,T] \to \mathbb{R}^n$,

$$\|z\|_L = \int\limits_0^T |z(s)|\, ds,$$

где $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$; D — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $\|x\|_D = \|\dot{x}\|_L + |x(0)|$; L_2 — пространство квадратично суммируемых функций $u : [0,T] \to \mathbb{R}^r$ со скалярным произведением

$$(u_1, u_2) = \int\limits_0^T u_1^\top(s) u_2(s)\, ds,$$

где $\cdot^\top$ — символ транспонирования. Будем предполагать, что главная часть [1] $Q : L \to L$, $Qz = \mathcal{L}(\int\limits_0^{(\cdot)} z(s)ds)$ оператора $\mathcal{L}$ имеет вид

$$(Qz)(t) = z(t) - \int\limits_0^t K(t,s) z(s) ds,$$

где элементы $k^{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяют условиям $|k^{ij}(t,s)| \leqslant m(t)$, $i,j = 1,\ldots,n$ с суммируемой на $[0,T]$ функцией m.

В виде (1) могут быть записаны различные классы систем управления, в том числе системы управления с распределенным и сосредоточенным запаздыванием и интегродифференциальные системы.

Рассмотрим задачу управления

$$\mathcal{L}x = v + Bu,\;\; x(0) = \alpha,\;\; \ell x = \beta, \tag{2}$$

где цель управления задается линейным ограниченным вектор-функционалом $\ell : D \to \mathbb{R}^n$. Такие задачи возникают, в частности, в экономической динамике, где целью управления может быть достижение заданного уровня β некоторой векторной характеристикой траектории x .

Условия разрешимости задачи управления (2) и конструкция соответствующих управлений могут быть эффективно записаны с использованием матрицы Коши $C(t,s)$, дающей для задачи Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \alpha$ представление решения

$$x(t) = X(t)\alpha + \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds.$$

Вектор-функционал цели ℓ имеет представление

$$\ell x = \Psi x(0) + \int\limits_0^T \Phi(\tau)\dot{x}(\tau)\,d\tau,$$

где Ψ — постоянная $n \times n$ -матрица, а элементы $n \times n$ -матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном.

Обозначим

$$\Theta(s) = \Phi(s) + \int\limits_s^T \Phi(\tau)C'_\tau(\tau,s)\,d\tau$$

и определим $n \times n$ -матрицу M равенством

$$M = \int\limits_0^T [B^*\Theta](s)[B^*\Theta]^\top(s)\,ds,$$

где $B^* : L^* \to L_2^*$ — сопряженный к $B : L_2 \to L$ оператор.

Т е о р е м а 1. *Невырожденность матрицы* M *— необходимое и достаточное условие разрешимости задачи управления* (2) *, при этом управление*

$$u_0 = [B^*\Theta]^\top M^{-1}[\beta - \Psi\alpha - \int_0^T \Theta(s)v(s)ds]$$

решает задачу (2) *и имеет минимальную норму в* L_2 *среди всех управлений, решающих задачу* (2) *.*

Современные вычислительные средства и технологии позволяют производить эффективную проверку условия $\det M \neq 0$ в результате целенаправленного вычислительного эксперимента (см. [2, 3]).

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьют. исслед., 2002. 384 с.
3. Румянцев А. Н. Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1999. 174 с.